

# UC Santa Cruz

## UC Santa Cruz Previously Published Works

### Title

Identification Method for Nodal Price Multiplicity in Electricity Markets

### Permalink

<https://escholarship.org/uc/item/4vk299x3>

### Journal

Zhongguo Dianji Gongcheng Xuebao/Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering, 37(3)

### ISSN

0258-8013

### Authors

Ding, Y  
Feng, D  
Zhang, L  
[et al.](#)

### Publication Date

2017-02-05

### DOI

10.13334/j.0258-8013.pcsee.152013

### Copyright Information

This work is made available under the terms of a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License, available at

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Peer reviewed

# 节点电价多解情况的判定方法

丁阳之<sup>1</sup>, 冯冬涵<sup>1</sup>, 张良<sup>2</sup>, 周全<sup>3</sup>, 张宇<sup>4</sup>

- (1. 电力传输与功率变换控制教育部重点实验室(上海交通大学), 上海市 闵行区 200240;
2. 明尼苏达大学电气与计算机工程系, 美国 明尼阿波利斯 55455;
3. 伊利诺伊理工学院电气与计算机工程系, 美国 芝加哥 60616;
4. 加州大学伯克利分校工业工程与运筹学系, 美国 伯克利 94720)

## Identification Method for Nodal Price Multiplicity in Electricity Markets

DING Yangzhi<sup>1</sup>, FENG Donghan<sup>1</sup>, ZHANG Liang<sup>2</sup>, ZHOU Quan<sup>3</sup>, ZHANG Yu<sup>4</sup>

- (1. Key Laboratory of Control of Power Transmission and Conversion, Ministry of Education (Shanghai Jiao Tong University), Minhang District, Shanghai 200240, China;
2. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, USA;
3. Department of Electrical and Computer Engineering, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL 60616, USA;
4. Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of California, Berkeley, CA 94720, USA)

**ABSTRACT:** In electricity markets, the stepwise supply and demand curves may yield multiple clearing prices. Considering the possibility of rare occurrence of this circumstance, a simple and effective identification method can significantly reduce the computational complexity. Capitalizing on the relationship between the linear independence constraint qualification and the uniqueness of Lagrange multipliers, this paper proposed an approach by using independence constraint qualification to identify the existence of multiple dual solutions in the nodal pricing problem. The validity of the proposed method was corroborated by theoretical analysis and case studies.

**KEY WORDS:** locational marginal pricing; multiple dual solution; linear independence constraint qualification; identification method; Lagrange multipliers

**摘要:** 在电力市场中, 由于供求曲线呈阶梯状的特性, 使得出清电价可能会出现多解情况。考虑到多解情况的非频发性, 一个简便有效的判定方法可以节省大量的冗余计算。因此, 根据线性无关约束规格与拉格朗日乘子唯一的对应关系, 文章提出了一种利用线性无关约束规格(linear independence constraint qualification, LICQ)判定节点电价对偶问题多解情况是否发生的方法。最后, 文章从理论分析和具体算例两方面验证了该判定方法的有效性。

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51477097, 51677115); 国家科技支撑计划项目(2013BAA01B04)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (51477097, 51677115); Project Supported by National Key Technology Research and Development Program of China (2013BAA01B04).

**关键词:** 节点电价; 对偶问题多解; 线性无关约束规格; 判定方法; 拉格朗日乘子

## 0 引言

与一般经济活动不同, 在电力市场中, 由于不同电厂报价不一, 不同购电方报价也不同, 且通常对最小报价单位或最多报价段数有要求, 例如, 澳大利亚电力市场<sup>[1]</sup>, 北欧电力市场(Nord Pool)<sup>[2]</sup>, 美国 PJM<sup>[3]</sup>和丹麦、瑞典、挪威和芬兰的平衡市场<sup>[4]</sup>等。因此供求曲线通常呈现明显的阶梯状。若供求曲线交于一点, 则该点为市场均衡点, 其对应的价格为市场出清价格<sup>[5-6]</sup>; 若交点不唯一, 则会出现对偶问题多解情况(multiple dual solutions, MDS)。

一旦出现 MDS 情况, 如何选定一组唯一的合理的节点电价便成了问题所在, 究其本质, 是研究如何对社会剩余中的伪公共剩余部分进行分配。目前, 在此方向的探索已颇为深入, 如基于激励的定价方法<sup>[7-8]</sup>, 基于阻塞剩余理论的定价方法<sup>[9-10]</sup>以及基于二次惩罚项的定价方法<sup>[11]</sup>等, 都能有效的解决 MDS 问题。但在实际电力市场中, MDS 情况并不多见, 因此, 如何检验 MDS 情况以避免大量冗余而无意义的计算, 便成了不可或缺的一环。基于此, 本文提出了一种利用线性无关约束规格检验 MDS 情况的判定方法。

## 1 约束规格(constraint qualification, CQ)

### 1.1 CQ 的定义

对于标准线性规划问题, 存在目标函数  $f$ , 等式约束条件  $h$  和不等式约束条件  $g$ , 其中:  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $h: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ ;  $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ . 而 CQ 则是对这些约束条件  $g$  和  $h$  的约束, 只有当满足 CQ 时, KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件才能成为该线性规划问题的必要最优性条件<sup>[12]</sup>. 其中, 最弱的 CQ 是 GCQ (guignard's constraint qualification)<sup>[13]</sup>, 最严格的是 LICQ<sup>[14]</sup>.

由于 CQ 是独立于目标函数  $f$  的, 因此, 若某种 CQ 条件下, 满足 KKT 条件的拉格朗日乘子组  $\mathcal{A}(f)$  拥有某种特定性质, 则这种性质必然对所有  $f \in \mathbf{F}$  均成立<sup>[15]</sup>.

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \{f \in C^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}) : \bar{x} \text{ 是线性优化问题的最优解}\} \\ \mathcal{A}(f) = \{(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m : (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \text{ 满足 KKT 条件}\} \end{cases}$$

式中  $(\lambda, \mu)$  为 KKT 条件中的拉格朗日乘子组。

### 1.2 LICQ 的定义及性质

LICQ 是所有 CQ 中具有最强约束力的一种, 若向量组  $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j=1}^k \cup \{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})}$  线性无关, 则称该优化问题在可行点  $\bar{x}$  处满足 LICQ. 其中:  $i=1, 2, \dots, m$  为不等式约束  $g$  的编号;  $j=1, 2, \dots, k$  为等式约束  $h$  的编号;  $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{i \in \mathbf{N} : 1 \leq i \leq m, g_i(\bar{x}) = 0\}$ , 即所有起作用的不等式约束的编号集合。

性质 1: 对于所有  $f \in \mathbf{F}$ , 满足 LICQ, 是  $\mathcal{A}(f)$  中有且只有唯一解的充要条件。

证明: 首先证明充分性, 因为  $\bar{x}$  是该线性优化问题的最优解, 且其约束条件满足 LICQ, 则必然存在一组乘子  $(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1)$  满足 KKT 条件, 假设存在另一组乘子  $(\bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_2)$  也满足 KKT 条件, 则有:

$$\nabla f(\bar{x}) + (\bar{\lambda}_1, \nabla h(\bar{x}))_{\mathbf{R}^k} + (\bar{\mu}_1, \nabla g(\bar{x}))_{\mathbf{R}^m} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla f(\bar{x}) + (\bar{\lambda}_2, \nabla h(\bar{x}))_{\mathbf{R}^k} + (\bar{\mu}_2, \nabla g(\bar{x}))_{\mathbf{R}^m} = 0 \quad (2)$$

由式(1)、(2)得:

$$\sum_{j=1}^k [(\bar{\lambda}_{2j} - \bar{\lambda}_{1j}) \cdot \nabla h_j(\bar{x})] + \sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} [(\bar{\mu}_{2i} - \bar{\mu}_{1i}) \cdot \nabla g_i(\bar{x})] = 0 \quad (3)$$

又因为  $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j=1}^k \cup \{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})}$  线性无关, 则有:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{1j} - \bar{\lambda}_{2j} = 0, & j=1, 2, \dots, k \\ \bar{\mu}_{1i} - \bar{\mu}_{2i} = 0, & i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \\ \bar{\mu}_{1i} = \bar{\mu}_{2i} = 0, & i \notin \mathcal{A}(\bar{x}) \end{cases} \quad (4)$$

所以  $\mathcal{A}(f)$  中有且只有唯一解。另外文献[15]已给出其必要性的证明。

综上, 对于所有  $f \in \mathbf{F}$ , 满足 LICQ 是  $\mathcal{A}(f)$  中有且只有唯一解的充要条件。

从证明过程中可以看出, 判断是否存在多组满足 KKT 条件的  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ , 只需验证 KKT 方程中的一阶最优性条件即可, 而不需要考虑互补松弛条件, 这是由线性优化问题中最优解点的性质决定的, 故在判别 MDS 情况方面, LICQ 判别方法较之 KKT 方程更为简便。而节点电价问题属于线性优化问题, 因此 LICQ 可以作为判定节点电价问题是否出现 MDS 情况的依据。

## 2 MDS 情况的判定

### 2.1 MDS 情况判定的数学推导

对于节点电价问题, 其线性优化模型为<sup>[16-19]</sup>:

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{g=1}^{N_G} \lambda_g^G P_g^G - \sum_{d=1}^{N_D} \lambda_d^D P_d^D \\ h(x) : \sum_{g=1}^{N_G} P_g^G - \sum_{d=1}^{N_D} P_d^D = 0 \\ g_l^L(x) : \sum_{b=1}^{N_B} [T_{l,b} \sum_{\substack{f_G(m)=b \\ f_D(n)=b}} (P_m^G - P_n^D)] - \bar{F}_l \leq 0 \\ - \sum_{b=1}^{N_B} [T_{l,b} \sum_{\substack{f_G(m)=b \\ f_D(n)=b}} (P_m^G - P_n^D)] + \underline{F}_l \leq 0, \\ \quad l=1, 2, \dots, N_L, b=1, 2, \dots, N_B \\ g_g^G(x) : P_g^G - \bar{P}_g^G \leq 0 \\ \quad - P_g^G + \underline{P}_g^G \leq 0, \quad g=1, 2, \dots, N_G \\ g_d^D(x) : P_d^D - \bar{P}_d^D \leq 0 \\ \quad - P_d^D + \underline{P}_d^D \leq 0, \quad d=1, 2, \dots, N_D \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $x = (P_G, P_D)$ ;  $f(x)$  为目标函数;  $h(x)$  为等式约束;  $g_l^L(x)$  为线路约束;  $g_g^G(x)$  为机组边际约束;  $g_d^D(x)$  为负荷边际约束;  $g$  为系统机组的编号;  $d$  为系统负荷的编号;  $b$  为系统节点的编号;  $l$  为系统线路的编号;  $\lambda_g^G$  为机组  $g$  的报价;  $P_g^G$  为机组  $g$  的有功出力;  $\lambda_d^D$  为负荷  $d$  的报价;  $P_d^D$  为负荷  $d$  的有功消耗;  $T_{l,b}$  为线路  $l$  关于节点  $b$  的功率传输分配系数;  $\bar{F}_l$  为线路  $l$  的容量上限;  $\underline{F}_l$  为线路  $l$  的容量下限;  $f_G(m)$  表示机组  $m$  所在节点的编号;  $f_D(n)$  表示负荷  $n$  所在节点的编号;  $\underline{P}_g^G$  为机组  $g$  的有功出力下限;  $\bar{P}_g^G$  为机组  $g$  的有功出力上限;  $\underline{P}_d^D$  为负荷  $d$  的有功消耗

下限;  $\bar{P}_d^D$  为负荷  $d$  的有功消耗上限。

令  $\bar{x}$  为原问题的最优解, 对应 LICQ 条件为  $\nabla h(\bar{x}) \cup \{\nabla g_l^L(\bar{x})\}_{l \in A_l(\bar{x})} \cup \{\nabla g_g^G(\bar{x})\}_{g \in A_G(\bar{x})} \cup \{\nabla g_d^D(\bar{x})\}_{d \in A_D(\bar{x})}$  线性无关, 其中:

$$\begin{cases} \nabla h(\bar{x}) = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N_G}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{N_D}) \\ \nabla g_l^L(\bar{x}) = (T_{l, M_{G \rightarrow B}}(1), T_{l, M_{G \rightarrow B}}(2), \dots, T_{l, M_{G \rightarrow B}}(N_G), T_{l, M_{D \rightarrow B}}(1), T_{l, M_{D \rightarrow B}}(2), \dots, T_{l, M_{D \rightarrow B}}(N_D)), l \in A_l(\bar{x}) \\ \nabla g_g^G(\bar{x}) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{g-1}, 1(-1), 0, 0, \dots, 0), g \in A_G(\bar{x}) \\ \nabla g_d^D(\bar{x}) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N_G+d-1}, 1(-1), 0, 0, \dots, 0), d \in A_D(\bar{x}) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $M_{G \rightarrow B}(g)$  表示机组  $g$  所在节点编号;  $M_{D \rightarrow B}(d)$  表示负荷  $d$  所在节点的编号; 向量  $\nabla g_g^G(\bar{x})$  和  $\nabla g_d^D(\bar{x})$  中, 1 代表非边际机组或负载出力处于上限, -1 代表非边际机组或负载出力处于下限, 且一

$$\begin{cases} A_l(\bar{x}) = \{l : 1 \leq l \leq N_L, g_l^L(\bar{x}) = 0\} \\ A_G(\bar{x}) = \{i : 1 \leq g \leq N_G, g_g^G(\bar{x}) = 0\} \\ A_D(\bar{x}) = \{j : 1 \leq d \leq N_D, g_d^D(\bar{x}) = 0\} \end{cases} \quad (6)$$

LICQ 条件中各梯度的表达式为

个非边际机组只可能有一个出力约束起作用, 对于边际机组, 由于其上下限约束  $g_g^G(\bar{x})$  均不起作用, 因此不会出现在 LICQ 条件中。故这些梯度构成的目标矩阵  $D$  中不会存在全为 0 的行向量, 其表达式为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ T_{l, M_{G \rightarrow B}}(1) & \dots & T_{l, M_{G \rightarrow B}}(N_G) & T_{l, M_{D \rightarrow B}}(1) & \dots & T_{l, M_{D \rightarrow B}}(N_D) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{L, M_{G \rightarrow B}}(1) & \dots & T_{L, M_{G \rightarrow B}}(N_G) & T_{L, M_{D \rightarrow B}}(1) & \dots & T_{L, M_{D \rightarrow B}}(N_D) \\ 1(-1) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1(-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1(-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1(-1) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla h(\bar{x}) \\ \leftarrow \nabla g_l(\bar{x}) \\ \vdots \\ \leftarrow \nabla g_l^L(\bar{x}) \\ \leftarrow \nabla g_g^G(\bar{x}) \\ \vdots \\ \leftarrow \nabla g_g^G(\bar{x}) \\ \leftarrow \nabla g_d^D(\bar{x}) \\ \vdots \\ \leftarrow \nabla g_d^D(\bar{x}) \end{matrix} \quad (8)$$

式中  $D$  的列向量对应着相应的机组或负载。

求解经济调度问题的优化模型, 并统计最优经济调度方案中阻塞线路的个数, 记为  $N_\mu$  (若某些阻塞线路两端节点相同, 则与其相关的机组线路功率传输分配系数均相同, 因此这些线路在数学意义上可视为等价, 故不重复计算这些阻塞线路数量, 记为一条), 边际单位个数(包括机组和负载)为  $N_m$ , 则其 KKT 方程中包含  $N_G + N_D$  个变量, 以及  $1 + N_G + N_D - N_m + N_\mu$  个方程。因此, 原问题约束条件的梯度构成的目标矩阵  $D$  为一个  $(1 + N_G + N_D - N_m + N_\mu) \times (N_G + N_D)$  阶矩阵, 其对应的 LICQ 条件可以转化为该目标矩阵  $D$  的行向量线性无关。

情况 1: 当  $1 + N_G + N_D - N_m + N_\mu > N_G + N_D$  时, 目标矩阵  $D$  的行向量必线性相关, 原问题的 KKT 条件不满足 LICQ, 因此  $A(f)$  中拉格朗日乘子组不唯一, 即当  $N_m - N_\mu < 1$  时, 原节点电价问题必会出现 MDS 情况。

情况 2: 当  $N_m - N_\mu \geq 1$  时, 对目标矩阵  $D$  进行简化:

步骤 1: 对目标矩阵  $D$  进行初等列变化: 若第  $s$  列向量所对应的机组或负载为边际单位, 而第  $s-1$  列向量所对应的机组或负载为非边际单位, 则调换这两列列向量的位置, 重复该操作, 直到所有的边际单位对应的列向量均位于非边际单位对应的列向量的左侧, 此时形成的矩阵记为  $D_1$ 。

步骤 2: 对  $D_1$  进行初等列变化: 若第  $t$  列向量对应的非边际单位处于出力上限, 而第  $t-1$  列向量对应的非边际单位处于出力下限, 则调换这两列列向量的位置, 重复该操作, 直到所有处于出力上限的非边际单位列向量均位于处于出力下限的非边际单位列向量的左侧, 此时形成的矩阵记为  $D_2$ 。

步骤 3: 对  $D_2$  进行初等行变换, 使  $D_2$  右下部分形成一个斜对角矩阵, 此时形成的矩阵记为  $D_3$ 。

$$D_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(-1)_{1 \times N_m} & \mathbf{1}(-1)_{1 \times (N_G + N_D - N_m)} \\ T_{N_\mu \times N_m}^{lm} & T_{N_\mu \times (N_G + N_D - N_m)}^l \\ \mathbf{0} & E \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D}_{(1+N_\mu) \times N_m} & \ddot{D}_{(1+N_\mu) \times (N_G + N_D - N_m)} \\ \mathbf{0} & E \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad -E \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中： $T^{lm}$ 为边际机组或负载所对应的线路 $l$ 的功率传输分配系数； $T^l$ 为非边际机组或负载所对应的线路 $l$ 的功率传输分配系数矩阵。

步骤4：对 $D_3$ 进行初等运算，使 $\ddot{D} = 0$ ，并将其中 $-E$ 矩阵转化 $E$ 矩阵，为记此时的矩阵为 $D_4$ 。

$$D_4 = \begin{bmatrix} \dot{D}_{(1+N_\mu) \times N_m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{bmatrix} \quad (10)$$

此时，可以从矩阵 $D_4$ 中得到判别矩阵 $\dot{D}$ ， $\dot{D}$ 中第一行元素为 $\pm 1$ ，其余行向量元素为所有边际机组所对应的阻塞线路功率传输分配系数。很容易看出，通过判别矩阵 $\dot{D}$ 的行向量是否线性相关可以判断目标矩阵 $D$ 的行向量是否线性相关，即是否满足LICQ条件。

情形①：当 $N_\mu = 0$ 时，判别矩阵 $\dot{D}$ 的行向量必线性无关，因此，目标矩阵 $D$ 的行向量线性无关，故满足LICQ，此时不会出现MDS情况。

情形②：当 $N_\mu \neq 0$ 时，判断 $r(\dot{D})$ 是否等于 $1 + N_\mu$ ，若相等，则判别矩阵 $\dot{D}$ 的行向量线性无关，KKT条件满足LICQ，不会出现MDS情况；若不相等，则判别矩阵 $\dot{D}$ 的行向量线性相关，KKT条件不满足LICQ，会出现MDS情况。

### 2.2 MDS情况判定的流程框图

结合上述情况1以及情况2中的两种情形，关于节点电价问题中是否会出现MDS情况的判定，可以总结为以下3个判定步骤，其流程框图如图1所示。

文献[10]提出了一种利用KKT系数矩阵判别节点电价问题是否会出现MDS情况的方法。该判别方法对所有节点电价问题均需要构造系数矩阵 $C$ ，并进行简化处理，但事实上，MDS情况并不常见，因此，对于包含多节点的大系统来说，这无疑大大增加了其不必要的运算负担。

而相比之下，本文提出的LICQ判别方法首先会对节点电价问题进行初步判定，之后，根据判定

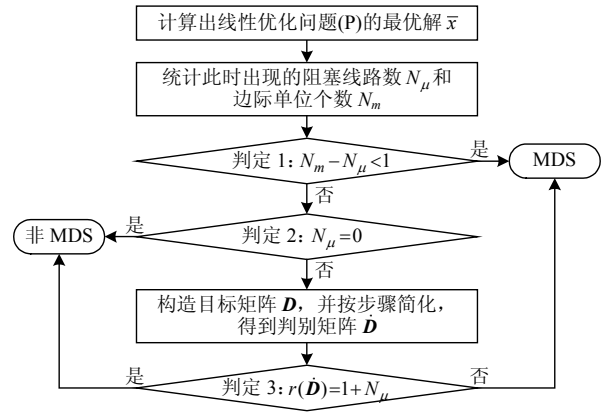


图1 MDS情况判定流程

Fig. 1 Identify procedure of MDS situation

结果，筛选出需要构造判别矩阵 $\dot{D}$ 的情况(这种情况并不常见)。这无疑大大减轻了系统的运算负担，而且判别矩阵 $\dot{D}$ 较之于KKT系数矩阵 $C$ 来说，更加易于构造，在这方面，也降低运算的复杂程度。因此，LICQ判别方法更加适用于实际工程中。

## 3 算例

本节将利用3个算例，通过节点电价问题中六种有代表性的情况，即① $N_\mu = 0, N_m = 0$ ；② $N_\mu = 0, N_m = 1$ ；③ $N_\mu = 1, N_m = 0$ ；④ $N_\mu = 1, N_m = 1$ ；⑤ $N_\mu = 1, N_m = 2$ 及⑥ $N_\mu = 1, N_m = 3$ ，来验证此判定方法在不同情况下的有效性。

### 3.1 2节点系统

2节点系统的具体网络结构如图2所示，机组及负荷信息见表1。

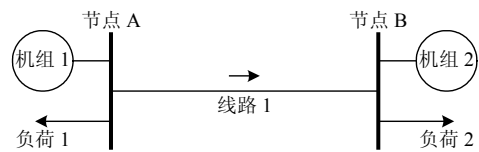


图2 2节点系统结构

Fig. 2 Network topology of the 2-bus system

表1 机组/负荷基本信息

Tab. 1 Information of Generators/Loads

内容	编号	(机组容量/需求负荷)/MW	报价/(\$/MW)
机组	1	500	10
	2	400	30
负荷	1	400	40
	2	500	50

1) 当线路1的传输容量为100MW时，其最优解为 $(P_1^G, P_2^G, P_1^D, P_2^D) = (500, 400, 400, 500)$ ，此时 $N_\mu = 0, N_m = 0, N_m - N_\mu = -1 < 1$ ，符合上述情况1，根据判定，此时会出现MDS情况。

下面进行验证, 根据 KKT 条件, 可以得到:

$$\begin{cases} 10 + \lambda + \mu_1 + \bar{\tau}_1 = 0 \\ 30 + \lambda + \bar{\tau}_2 = 0 \\ 40 + \lambda + \mu_1 - \bar{\xi}_1 = 0 \\ 50 + \lambda - \bar{\xi}_2 = 0 \\ \mu_1, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \geq 0 \\ \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $(\lambda, \mu_i, \bar{\tau}_i, \bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i)$  为拉格朗日乘子。

此时, KKT 简化方程组一共有 6 个未知数, 4 个方程, 故其解不唯一, 因此会出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

2) 当线路 1 的传输容量为 200MW 时, 其最优解为  $(P_1^G, P_2^G, P_1^D, P_2^D) = (500, 400, 400, 500)$ , 此时  $N_\mu = 0, N_m = 0, N_m - N_\mu = 0 < 1$ , 符合上述情况 1, 根据判定, 此时会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 根据 KKT 条件, 可以得到:

$$\begin{cases} 10 + \lambda + \bar{\tau}_1 = 0 \\ 30 + \lambda + \bar{\tau}_2 = 0 \\ 40 + \lambda - \bar{\xi}_1 = 0 \\ 50 + \lambda - \bar{\xi}_2 = 0 \\ \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \geq 0 \\ \mu_1 = \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

此时, KKT 简化方程组共有 5 个未知数, 4 个方程, 故其解不唯一, 通过对偶理论解出得  $-40 \leq \lambda \leq -30, \mu = 0$ , 因此会出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

### 3.2 3 节点系统

3 节点系统的具体网络结构如图 3 所示, 机组及负荷信息见表 2。

1) 若不考虑系统线路阻塞, 其最优解为:  $(P_1^G, P_2^G, P_3^G, P_1^D, P_2^D, P_3^D) = (1000, 100, 0, 700, 200, 200)$ , 此时  $N_\mu = 0, N_m = 0, N_m - N_\mu = 1$ , 符合上述情况 2

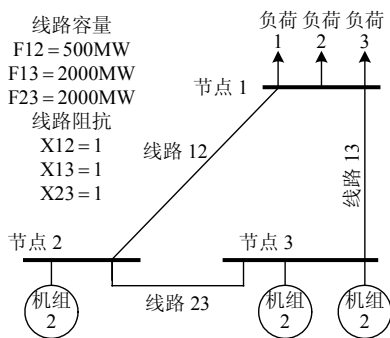


图 3 3 节点系统结构

Fig. 3 Network topology of the 3-bus system

表 2 机组/负荷基本信息

Tab. 2 Information of Generators/Loads			
内容	编号	(机组容量/需求负荷)/MW	报价/(\$/MW)
机组	1	1000	15
	2	300	20
	3	500	35
负荷	1	700	60
	2	200	40
	3	200	25

的情形①, 根据判定, 此时不会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 根据 KKT 条件, 可以得到:

$$\begin{cases} 15 + \lambda + \bar{\tau}_1 = 0 \\ 20 + \lambda = 0 \\ 35 + \lambda - \bar{\tau}_3 = 0 \\ 60 + \lambda - \bar{\xi}_1 = 0 \\ 40 + \lambda - \bar{\xi}_2 = 0 \\ 25 + \lambda - \bar{\xi}_3 = 0 \\ \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3 \geq 0 \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_3 = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

该 KKT 简化方程包含 6 个未知数以及 6 个方程, 可以得到唯一解  $\lambda = -20, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ , 因此, 不会出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

2) 当考虑系统线路阻塞时, 其最优解为:  $(P_1^G, P_2^G, P_3^G, P_1^D, P_2^D, P_3^D) = (600, 300, 0, 700, 200, 0)$ , 此时  $N_\mu = 1, N_m = 1, N_m - N_\mu = 0 < 1$ , 符合上述情况 1, 根据判定, 此时会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 根据 KKT 条件, 可以得到:

$$\begin{cases} 15 + \lambda + \frac{1}{3}\mu_1 = 0 \\ 20 + \lambda + \bar{\tau}_2 = 0 \\ 35 + \lambda - \bar{\tau}_3 = 0 \\ 60 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 - \bar{\xi}_1 = 0 \\ 40 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 - \bar{\xi}_2 = 0 \\ 25 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 + \bar{\xi}_3 = 0 \\ \mu_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3 \geq 0 \\ \mu_2 = \mu_3 = \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_3 = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

此时, KKT 简化方程包含 7 个未知数以及 6 个方程, 故其解不唯一, 因此会出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

3) 若将负荷 1 的需求上限降至 640MW, 其他条件不变, 且考虑线路阻塞, 则最优解变为:

$(P_1^G, P_2^G, P_3^G, P_1^D, P_2^D, P_3^D) = (660, 180, 0, 640, 200, 0)$ , 此时  $N_\mu = 1, N_m = 2, N_m - N_\mu = 1$ , 符合上述情况 2 中的情形②, 故需要计算  $r(\dot{D})$ , 按要求构造判别矩阵  $\dot{D}$ , 最终得到:

$$\dot{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

显然,  $r(\dot{D}) = 2 = 1 + N_\mu$ , 根据判定, 此时不会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 根据 KKT 条件, 可以得到:

$$\begin{cases} 15 + \lambda + \frac{1}{3}\mu_1 = 0 \\ 20 + \lambda = 0 \\ 35 + \lambda - \tilde{\tau}_3 = 0 \\ 60 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 - \tilde{\xi}_1 = 0 \\ 40 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 - \tilde{\xi}_2 = 0 \\ 25 + \lambda - \frac{1}{3}\mu_1 + \tilde{\xi}_3 = 0 \\ \mu_1, \tilde{\tau}_3, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3 \geq 0 \\ \mu_2 = \mu_3 = \tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_3 = \tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_2 = \tilde{\xi}_3 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

该 KKT 简化方程包含 6 个未知数及 6 个方程, 可以得到唯一解  $\lambda = -20, \mu_1 = 15, \mu_2 = \mu_3 = 0$ , 因此, 不会出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

### 3.3 IEEE 24 节点系统

本例是基于 IEEE 24 节点 RTS 系统, 其中包括 32 台发电机组及 17 个负荷点。其发电侧的机组容量及报价如表 3 所示。

为了方便计算, 负载侧需求负荷采用第 51 周周二下午 17:00—18:00 间的数据<sup>[20]</sup>, 考虑 RTS 系

表 3 发电机组基本信息

Tab. 3 Information of Generators

机组编号	机组容量/MW	机组报价/(\$/MW)
1	17.31	39.00
2, 5, 6	10	35.10
3, 4, 7, 8	76	19.95
9, 10, 11	80	28.82
12	98.44	38.50
13, 14	98.43	38.50
15, 16, 17, 18, 19	12	33.85
20, 21, 30, 31	155	16.15
22, 23	400	5.50
24, 25, 26, 27, 28, 29	50	1.00
32	350	6.28

统的网络损耗, 因此, 将负载侧总需求负荷设为 2999.3MW, 此外, 将负载侧报价统一设置为 40.00\$/MW, 此时, 其报价高于所有发电机组报价, 因此, 在条件允许的情况下, 将优先考虑满足负载侧需求。

下面考虑 2 种情况, 第 1 种情况下, 各线路传输容量为原始值, 此时系统中不存在线路阻塞, 负载侧需求容量全部处于上限; 第 2 种情况下, 将连接节点 3 和节点 24 的线路 7 的传输容量上限降为 270MW, 此时, 该线路出现阻塞, 负载侧需求容量仍全部处于上限。各机组出力情况见表 4。

表 4 各机组出力情况  
Tab. 4 Output of Generators

机组编号	无阻塞情况/MW	有阻塞情况/MW
1	0	17.31
2, 5, 6	10	10
3, 4, 7, 8	76	76
9, 10, 11	80	80
12	98.44	92.67
13, 14	98.43	92.66
15, 16, 17, 18, 19	12	12
20, 21, 30, 31	155	155
22, 23	400	400
24, 25, 26, 27, 28, 29	50	50
32	350	350

当系统不存在阻塞时, 从表中很容易看出:  $N_\mu = 0, N_m = 0$ , 此时  $N_m - N_\mu = 0 < 1$ , 符合上述情况 1, 根据判定, 此时会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 该 KKT 简化方程包含 33 个未知数及 32 个方程, 可以算出  $-39 \leq \lambda \leq -38.5, \mu = 0$ , 因此, 出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

当系统存在阻塞时, 从表中数据可以看出,  $N_\mu = 1, N_m = 3$ , 此时  $N_m - N_\mu = 2 > 1$ , 符合上述情况二中的情形②, 故需计算  $r(\dot{D})$ , 由于 3 个边际机组均属于节点 13, 因此, 在线路约束条件中, 他们的系数相同, 均为  $T_{7,13}$ , 所以:

$$\dot{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ T_{7,13} & T_{7,13} & T_{7,13} \end{bmatrix} \quad (17)$$

显然  $r(\dot{D}) = 1 \neq 1 + N_\mu$ , 根据判定, 此时会出现 MDS 情况。

下面进行验证, 该 KKT 简化方程包含 31 个未知数及 32 个方程, 但其中有 3 个方程等效, 故有效方程数为 30 个, 此时可以算出,  $\mu_7$  不唯一, 因

此, 出现 MDS 情况, 与判定结果一致。

## 4 结论

在电力交易市场中, MDS 情况虽然并不常见, 但其造成的影响却不可忽略, 目前还没有一套成熟的体系来判别 MDS 情况是否发生。本文从 LICQ 与拉格朗日乘子的对应关系出发, 提出了一种利用 LICQ 判别节点电价问题中是否出现 MDS 情况的方法, 并从理论上分析了该方法的推导过程。之后, 在此基础上, 归纳并简化了该方法的判定条件。最后, 又通过三个具体算例, 从不同角度验证了该方法在任何情况下的有效性。

## 致谢

衷心感谢国家能源智能电网(上海)研发中心对本文研究工作的支持。

## 参考文献

- [1] Gillett R, Operations M. Pre-dispatch process description [EB/OL]. [2013-10-12]. <http://www.aemo.com.au/Electricity/Market-Operations/Dispatch/~media/Files/Other/electricityops/0140-0040%20pdf.ashx>.
- [2] Nord Pool. The Nord pool markets[EB/OL]. [2013-10-12]. <http://www.nordpoolspot.com>.
- [3] PJM Interconnection, L. L. C. Operating agreement of the PJM interconnection, L. L. C. [EB/OL]. [2013-10-12]. <http://www.pjm.com/~media/documents/manuals/m33.ashx>.
- [4] Organization for the Nordic Transmission System Operators(Nordel). Harmonization of Balance regulation in the Nordic countries[EB/OL]. [2013-10-12]. <http://www.entsoe.eu>.
- [5] Gan Deqing, Feng Donghan, Xie Jun. Electricity markets and power system economics[M]. Boca Raton, USA: CRC Press, 2013.
- [6] 王锡凡, 王秀丽, 陈皓勇. 电力市场基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2003.  
Wang Xifan, Wang Xiuli, Chen Haoyong. Basis of electricity market[M]. Xi'an: Xi'an Jiao Tong University Press, 2003(in Chinese).
- [7] Feng Donghan, Xu Zhao, Zhong Jin, et al. Spot pricing when Lagrange multipliers are not unique[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 314-322.
- [8] 周全, 冯冬涵, 方陈, 等. 对偶问题多解情况下一种基于激励的节点电价确定方法[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(13): 38-44.  
Zhou Quan, Feng Donghan, Fang Chen, et al. An incentive-based nodal pricing method under multiple dual solutions[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(13): 38-44(in Chinese).
- [9] Alguacil N, Arroyo J M, Garc í a-Bertrand R. Optimization-based approach for price multiplicity in network-constrained electricity markets[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 4264-4273.
- [10] Zhang Liang, Feng Donghan, Lei Jinyong, et al. Congestion surplus minimization pricing solutions when Lagrange multipliers are not unique[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(5): 2023-2032.
- [11] Hogan W W. Multiple market-clearing prices, electricity market design and price manipulation[J]. The Electricity Journal, 2012, 25(4): 18-32.
- [12] Solodov M V. Constraint qualifications[M]. Cochran J J. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. New York: Wiley, 2010.
- [13] Gould F J, Tolle J W. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1971, 20(2): 164-172.
- [14] 黎健玲, 谢琴, 简金宝. 均衡约束数学规划的约束规格和最优化条件综述[J]. 运筹学学报, 2013, 17(3): 73-85.  
Li Jianling, Xie Qin, Jian Jinbao. Review on constraint qualifications and optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(3): 73-85(in Chinese).
- [15] Wachsmuth G. On LICQ and the uniqueness of Lagrange multipliers[J]. Operations Research Letters, 2013, 41(1): 78-80.
- [16] Schweppe F, Caramanis M C, Tabors R D, et al. Spot pricing of electricity[M]. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [17] Green R. Competition in generation: the economic foundations[J]. Proceedings of the IEEE, 2000, 88(2): 128-139.
- [18] Gan Daqiang, Litvinov E. Energy and reserve market designs with explicit consideration to lost opportunity costs[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(1): 53-59.
- [19] 冯冬涵, 甘德强, 钟金, 等. 电力市场出清电价的非惟一性及定价新方法[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(12): 27-32.  
Feng Donghan, Gan Deqiang, Zhong Jin, et al. Pricing when market optimization has multiple dual solutions[J]. Automation of Electric Power Systems, 2006, 30(12): 27-32(in Chinese).
- [20] Grigg C, Wong P, Albrecht A, et al. The IEEE reliability test system-1996. A report prepared by the reliability test system task force of the application of probability methods subcommittee[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1999, 14(3): 1010-1020.





丁阳之

收稿日期: 2016-01-05。

作者简介:

丁阳之(1992),男,硕士研究生,主要研究方向为电力市场, [dyz19920605@sjtu.edu.cn](mailto:dyz19920605@sjtu.edu.cn);

冯冬涵(1981),男,博士,副教授,主要研究方向为智能电网中的策略与风险;

张良(1990),男,博士研究生,主要研究方向为优化理论在电力市场中的应用;

周全(1989),男,博士研究生,主要研究方向为电力系统优化运行;

张宇(1985),男,博士后,主要研究方向为电力系统优化。

(编辑 邱丽萍)

## “电力电子化电力系统稳定分析与控制”专题征稿启事

随着可再生能源发电、远距离输电及无功补偿和交流传动等应用的快速发展,电力电子变换装备因其在电能变换方面的灵活性,在电力系统中的渗透水平不断提高,国内外电力系统将可能在局部电网甚至全网出现100%由电力电子化电力装备组成的电力系统,这将深刻地改变着电力系统的动态行为。近年来,国内外电力系统持续出现各种不明机理的动态问题,对电力系统安全稳定和运行构成重大威胁。

为展示国内外在电力电子化电力系统领域的最新进展和发展趋势,共享学术和技术成果,《中国电机工程学报》编辑部特邀华中科技大学袁小明教授、胡家兵教授担任特约主编,主持“电力电子化电力系统稳定分析与控制”专题,希望与作者、读者一起,共同研讨相关领域的最近进展、现场经验及未来方向,共同推进电力电子化电力系统稳定、分析与控制的新原理、新理论、新方法、新技术、新应用等方面的研究成果。专题拟于2017年7月出版(正刊)。

### 一、专题征稿范围(包括但不限于)

- 1) 源-网-荷电力电子变换装备多时间尺度小干扰模型及建模方法;
- 2) 电力电子化电力系统机电/电磁小干扰稳定原理;
- 3) 电力电子化电力系统多时间尺度小干扰稳定分析方法;
- 4) 源-网-荷电力电子变换装备机电/电磁暂态模型及建模方法;
- 5) 电力电子化电力系统机电/电磁暂态稳定原理;
- 6) 电力电子化电力系统大干扰/暂态稳定分析方法;
- 7) 电力电子化电力系统多时间尺度稳定器原理、设计方法及应用;
- 8) 电力电子化电力系统大干扰/暂态稳定控制策略。

### 二、投稿要求

- 1) 引言中研究目的清晰明确,详细介绍国内外研究背景,对现有其他研究者的工作进行正确的评述;阐述自己的观点,并对自己的研究思路做一总体介绍,引言字数不少于1000字;
- 2) 研究设计和方法叙述清楚,数据合理并被正确地分析和解释;比较所提出的方法和现有方法的优缺点;
- 3) 重点突出,论述严谨,文字简练,避免长篇公式推导(必要的推导可列入附录),字数以不超过6000字(包括图表)为宜;
- 4) 来稿请用Word排版,格式尽量与《中国电机工程学报》一致;
- 5) 对英文稿件的要求与对中文稿件的要求相同,请同时提供作者中文信息。

### 三、投稿截止日期: 2017年2月28日。

### 四、投稿方式:

请登录<http://www.pcsee.org>,注册作者用户名和密码投稿,请注意在投稿栏目中选择“电力电子化电力系统”。

真诚欢迎国内外相关领域的专家学者以及国家级科研计划承担单位踊跃投稿!

联系人: 韩蕾 袁小明 胡家兵 吕鲜艳

联系电话: 010-82812535

邮箱: [hanlei@epri.sgcc.com.cn](mailto:hanlei@epri.sgcc.com.cn); [yuanxm@hust.edu.cn](mailto:yuanxm@hust.edu.cn);

[j.hu@hust.edu.cn](mailto:j.hu@hust.edu.cn); [csee\\_lvxiyan@163.com](mailto:csee_lvxiyan@163.com).