Title
OPERATOR-ALGEBRAS WITHOUT ORDER - SOLUTION TO THE CONTRACTIVE PROJECTION PROBLEM

Journal
COMPTES RENDUS DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE I-MATHEMATIQUE, 296(9)

ISSN
0764-4442

Authors
FRIEDMAN, Y
RUSSO, B

Publication Date
1983

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Algèbres d'opérateurs sans ordre : solution du problème du projecteur contractif.* Note (*) de **Yaakov Friedman** et **Bernard Russo** présentée par Alain Connes.

Une J*-algèbre est le modèle algébrique naturel pour les systèmes d'opérateurs sans ordre. On démontre que la classe de J*-algèbres est stable par les projecteurs de norme 1.

FUNCTIONAL ANALYSIS. — Operator Algebras without Order: Solution to the Contractive Projection Problem.

A J-algebra is the natural algebraic model for operator systems without order. We prove that the class of J*-algebras is stable under the action of norm one projections.*

En 1977, E. Effros [1] a proposé trois catégories pour faciliter l'étude de l'injectivité et de la nucléarité : $\mathcal{N}$, espaces normés réels, contractions; $\mathcal{F}$, systèmes des fonctions, applications positives unitales; $\mathcal{O}$, systèmes d'opérateurs, applications complètement positives unitales.

Il est connu que les modèles algébriques naturels pour les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ sont respectivement : « algèbre de Banach-Jordan » et « C*-algèbre ». On peut se demander s'il y a un modèle algébrique correspondant dans la catégorie $\mathcal{N}$.

Parce que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ sont inclus dans $\mathcal{N}$, on peut commencer par la considération des propriétés géométriques dans les modèles algébriques de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ qui ne dépendent pas de la structure d'ordre. On trouve alors qu'il s'agit d'une structure de produit triple, à savoir $\{xyz\}=1/2(xy^*z+zy^*x)$. Il en résulte donc que « J*-algèbre » serait une réalisation concrète d'un modèle algébrique dans $\mathcal{N}$.

Une J*-*algèbre* est un sous-espace complexe linéaire de $\mathcal{L}(H, K)$, fermé pour la norme de $\mathcal{L}(H, K)$, et stable par l'opération $a \mapsto aa^* a$. C'est un cas particulier d'un *système triple de Jordan* [2].

Pour affirmer la conclusion annoncée ci-dessus on passe aux morphismes dans chaque catégorie. D'un côté, on sait qu'une isométrie d'une J*-algèbre sur une autre est un J*-isomorphisme [3]. De plus, il est classique qu'une isométrie positive unitale d'une JC-algèbre conserve la structure de Jordan (Kadison) et même qu'une isométrie complètement positive unitale d'une C*-algèbre conserve la structure de C*-algèbre (Choi, *voir* [1]). Donc, dans chaque modèle algébrique, les isométries surjectives coïncident avec les isomorphismes algébriques.

D'un autre côté on peut examiner les applications idempotentes dans chaque catégorie algébrique, qui diminuent la norme. Il est connu que l'image d'un projecteur complètement positif unital sur une C*-algèbre est une C*-algèbre [4], et que l'image d'un projecteur positif unital sur une JC-algèbre est une JC-algèbre [5].

Le premier travail consacré à l'étude des projecteurs contractifs et non-positifs a été [6] dans lequel le problème était complètement résolu pour l'espace d'opérateurs compacts dans un espace hilbertien. Ensuite, une solution pour les C*-algèbres commutatives était obtenue dans [7].

Inspirés par ces résultats, les auteurs ont suggéré [8] que l'image d'un projecteur contractif quelconque sur une C*-algèbre aurait une structure de système triple de Jordan. Récemment, les auteurs ont donné une réponse affirmative à cette question [9], en démontrant que la classe des J*-algèbres est stable par les projecteurs de norme un. Comme l'image d'un projecteur contractif, même définie sur une C*-algèbre, a, en général, seulement une structure de J*-algèbre, cela confirme que « J*-algèbre » *soit* le modèle algébrique concret naturel pour la catégorie $\mathcal{N}$.

Nous donnons maintenant un exposé assez détaillé sur la structure algébrique de l'image d'un projecteur contractif sur une J*-algèbre.

On rappelle quelques notations et résultats de [10]. Soit M une J*-algèbre. Pour chaque $f \in M'$, $v = v(f)$ signifie l'unique isométrie partielle dans M'' donnée par la décomposition polaire de f. Alors $l(f) = vv^*$ et $r(f) = v^* v$ sont des projecteurs hermitiens dans l'algèbre de von Neumann A'', où A est une C*-algèbre quelconque dans laquelle M est contenue comme sous-J*-algèbre. Pour une isométrie partielle v quelconque de M'', les « projecteurs de Peirce » sont définis sur M'' par :

$$E(v)x = lxr, \qquad F(v)x = (1-l)x(1-r),$$
$$G(v)x = lx(1-r) + (1-l)xr,$$

où $l = vv^*$ et $r = v^* v$. Aussi $E(v)$, $F(v)$, $G(v)$ opèrent sur le dual M' de la manière suivante : $E(v)g = g \circ E(v)$, etc., pour $g \in M'$. Si $v = v(f)$, on écrit $E(f)$ pour $E(v(f))$, etc.

Soit Q un projecteur contractif sur le dual M' d'une J*-algèbre M. Tout point extrémal de la boule unité $Q(M')_1$ de l'image de Q s'appelle « atome de Q ». Les projecteurs $L_0 = \sup\{l(f) : f \text{ atome de Q}\}$, $R_0 = \sup\{r(f) : f \text{ atome de Q}\}$ dans A'' définissent des projecteurs contractifs $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{F}_0$ sur A'' par les formules $\mathscr{E}_0 z = L_0 z R_0$, $\mathscr{F}_0 z = (1-L_0) z (1-R_0)$, pour $z \in A''$. L'espace $\mathscr{E}_0 Q'(M'') \subseteq A''$ s'appelle la partie atomique de Q'.

Chaque atome f de Q a la propriété suivante : $QE(f)g = \langle g, v \rangle f$, pour $g \in M'$, où $v = v(f)$; donc f est un point exposé de $Q(M')_1$. Par conséquent, v est une tripotente minimale de Q' au sens que :

$$(1) \qquad E(v)Q'x = \langle f, x \rangle v \qquad \text{pour} \quad x \in M''.$$

En général, v n'appartient pas à l'image de Q' bien qu'un prolongement normique de v y appartienne. De l'autre côté, on a la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soit* Q *un projecteur de norme* 1 *sur le dual* M' *d'une* J*-*algèbre* M *et soit* f *un atome de* Q. *Alors* $\mathscr{E}_0 Q' v = v$, *où* $v = v(f)$, *c'est-à-dire* v *appartient à la partie atomique de* Q'.

La proposition 1 et (1) disent que la partie atomique de Q' est stable par le projecteur de Peirce $E(f)$, f atome de Q. La proposition suivante démontre que $G(f)$ a la même propriété, donc que chaque projecteur de Peirce d'un atome de Q laisse $\mathscr{E}_0 Q'(M'')$ invariant. Dans la démonstration il arrivera que $G(f)Q'(M'')$ soit une J*-algèbre de rang $\leqq 2$.

Proposition 2. — *Soit* Q *un projecteur de norme* 1 *sur le dual* M' *d'une* J*-*algèbre* M *et soit* f *un atome de* Q. *Alors* $\mathscr{E}_0 Q' a = a$ *pour tout* $a \in G(f) Q'(M'')$.

Le fait que $Q(M')$ soit stable par les projectures de Peirce d'un élément φ quelconque de $Q(M')$ est une conséquence de [10].

Un autre outil important, outre les projecteurs de Peirce, est une décomposition :

$$(2) \qquad \varphi = \sum \lambda_i f_i + \psi$$

d'un élément $\varphi \in Q(M')$, où $\{f_i\}$ sont des atomes de Q, deux-à-deux orthogonaux, ψ est orthogonal à chaque f_i, et $E(\psi)Q'(M'')$ est une JBW-algèbre purement non-atomique. Cette décomposition locale est une conséquence du fait que, d'après [5], $B = E(\varphi)Q'(M'')$ est une JBW-algèbre. Le théorème suivant dit que cette décomposition est en fait globale.

THÉORÈME 1. — *Soit* Q *un projecteur de norme* 1 *sur le dual* M′ *d'une* J*-*algèbre* M. *Alors,* $Q(M') = \mathscr{A} \oplus_{l_1} \mathscr{N}$, *où* $\mathscr{A}$ *est le sous-espace linéaire fermé engendré par les atomes de* Q, *et la boule unité de* $\mathscr{N}$ *n'a pas de point extrémal. De plus :*

$$\mathscr{A} = \mathscr{E}_0 Q(M') \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{N} = \mathscr{J}_0 Q(M').$$

L'outil principal pour la démonstration du théorème 1 est la proposition suivante, dont la preuve utilise elle-même une généralisation de la célèbre « propriété de boule de Hilbert » de [11].

PROPOSITION 3 (Propriété de rayon extrémal). — *Soit* Q *un projecteur de norme* 1 *sur le dual* M′ *d'une* J*-*algèbre* M, *soit* f *un atome de* Q *et soit* $\varphi \in Q(M')$, *Ou bien* $E(\varphi) f = 0$ *ou* $\| E(\varphi) f \|^{-1} E(\varphi) f$ *est un atome de* Q.

Maintenant, nous considérons un projecteur P de norme 1 sur une J*-algèbre M. La décomposition $P' = \mathscr{E}_0 P' + \mathscr{J}_0 P'$, donnée par le théorème 1 implique une décomposition orthogonale correspondante de P″. D'après Krein-Milman, l'application $\mathscr{E}_0$ est isométrique sur P(M). On démontre que $\mathscr{E}_0 P(M)$ est une J*-algèbre, ce qui donnera le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* P *un projecteur de norme* 1 *sur une* J*-*algèbre. Alors* P(M), *muni du produit triple* $\{ a, b, c \} = P(1/2(ab^* c + cb^* a))$, *est un système triple de Jordan qui a une représentation fidèle comme* J*-*algèbre.*

Pour prouver le théorème 2, on démontre d'abord que l'espace linéaire N engendré par les tripotentes minimales de P″ est faiblement dense dans $\mathscr{E}_0 P''(M'')$. Ensuite on démontre que chaque élément de N est une combinaison linéaire des tripotentes minimales de P″ deux-à-deux orthogonales. Pour effectuer ce processus d'orthogonalisation, il faut prouver que la correspondance $v(f) \mapsto f$ définit une injection linéaire de N dans $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{E}_0 P''(M'')$ est une J*-algèbre.

Posons $y = \mathscr{E}_0 x$ avec $x \in P(M)$. Alors $x = y + z$ avec $z = \mathscr{J}_0 z$ et donc $xx^* x = yy^* y + zz^* z$. Parce que $yy^* y \in \mathscr{E}_0 P''(M'')$ et $zz^* z = \mathscr{J}_0 (zz^* z)$, on a $\mathscr{E}_0 P(xx^* x) = yy^* y$, d'où le théorème 2.

Le théorème suivant donne des propriétés géométriques de la boule unité de l'image d'un projecteur de norme 1 sur le dual d'une J*-algèbre. Ces propriétés, obtenues en démontrant le théorème 2, sont analogues aux propriétés développées dans [11] pour l'espace des états d'une algèbre de Jordan (qui correspond ici au cas : M = algèbre de Jordan, Q = des états).

THÉORÈME 3. — *Soit* Q *un projecteur de norme* 1 *sur le dual* M′ *d'une* J*-*algèbre* M *et soit* K *la boule unité de* Q(M′). *Alors :*

1° *l'enveloppe σ-convexe des points extrémaux de* K *a une face complémentaire dans* K ;

2° *tout point extrémal de* K *est exposé ;*

3° *pour chaque* $\varphi \in Q(M')$, *l'opérateur* $E(\varphi)$ *préserve les rayons extrémaux de* K ;

4° *pour chaque paire* f, g *de points extrémaux de* K, *on a* $f(v(g)) = \overline{g(v(f))}$.

(*) Remise le 21 février 1983.

[1] E. EFFROS, *Lect. Notes in Math.*, 650, 1978, p. 1.

[2] O. LOOS, *Lect. Notes in Math.*, 460, 1975.

[3] L. HARRIS, *Lect. Notes in Math.*, 364, 1973, p. 13.

[4] M. D. CHOI et E. EFFROS, *J. Funct. Anal.*, 24, 1977, p. 156.

[5] E. EFFROS et E. STORMER, *Math. Scand.*, 45, 1979, p. 127.

[6] J. Arazy et Y. Friedman, *Memoirs A.M.S.*, 13, n° 200, 1978.

[7] Y. Friedman et B. Russo, *Trans. A.M.S.*, 273, 1982, p. 57.

[8] Y. Friedman et B. Russo, *Proc. Symp. Pure Math.*, 38, Part 2, 1982, p. 615.

[9] Y. Friedman et B. Russo, *Solution to the Contractive Projection Problem* (à paraître).

[10] Y. Friedman et B. Russo, *Contractive Projections on Operator Triple Systems* (à paraître dans *Math. Scand.*).

[11] E. Alfsen et F. W. Shultz, *Acta Math.*, 140, 1978, p. 155.

Department of Mathematics, University of California,
Irvine, CA 92717, *États-Unis.*