Title

Stochastic analysis of colliding Brownian particles

Journal

SUGAKU, 75(1)

ISSN

0039-470X

Author

Ichiba, Tomoyuki

Publication Date

2023-01-25

衝突ブラウン粒子の確率解析

一　場　知　之

1　はじめに

本稿では n 個の大きさを無視できるほど極小の粒子が相互に作用しながらブラウン運動のように確率的に動く時に，その粒子の軌跡が同時に交わり粒子が衝突する様子を考察し，その応用，特に数理ファイナンスへの応用について述べる．物理現象としては 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上を動く粒子系を考察するのが自然であるが，ここでは応用に主眼を置いて，粒子が 1 次元空間 $\mathbb{R}$ を動く模型について考察する．物理現象として粒子の大きさや形状を無視できないような場合やどの粒子も全く衝突しないような非衝突粒子系については，興味深いものの，分析の本質がやや異なるため言及せず，ここでは粒子が衝突する様を確率論を用いて分析する．各 $i = 1, \dots, n$ について確率変数 $X_i(t)$ を i 番目の粒子の実軸上での時刻 t での位置として，確率過程 $X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t))'$ を以下のように定式化する．ここで $'$ は行列の転置を表す．

$\mathbb{R}^n$ に値を持つ $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 上の連続関数からなる空間 $C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ を標本とするフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\})$ と，そこで定義される n 次元の標準ブラウン運動 $B := \{(B_1(t), \dots, B_n(t))',\ 0 \le t < \infty\}$ を考える．ドリフト係数 $b(\cdot) := (b_1(\cdot), \dots, b_n(\cdot))'$ と拡散係数 $\sigma(\cdot) := (\sigma_{i,j}(\cdot))_{1 \le i,j \le n}$ をそれぞれ n 次元ベクトル，n 次の正方行列の値を持つ可測な関数として，以下の確率微分方程式

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X(s))\,\mathrm{d}B(s)\,; \quad 0 \le t < \infty,\ x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

によって表される確率過程 $X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t))'$, $t \in [0, \infty)$ の振る舞いを調べる．(1) の右辺の第 3 項は伊藤の確率積分として定義される．

確率微分方程式 (1) の解の概念としては, 強い解と弱い解がある．(1) の弱い解とは, フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\})$ と適合的な確率過程 (X, B) で (1) を満たすものとする．強い解とは特に X が, ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター $\{\mathcal{F}_t^B := \sigma(B(s), s \in [0,t]), t \in \mathbb{R}_+\}$ に適合的である場合である．すなわち，(1) の強い解が存在して一意に定まるとは，ある可測関数 $F : (x_0, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega_0 \mapsto F(x_0, \omega)(\cdot) \in \Omega_0$ が存在して次の条件 (i)–(iii) を満たすことである：(i) $F(\cdot)$ はボレル可測で写像 $\omega \mapsto F(x_0, \omega)(t) \in \mathbb{R}^n$ は各時点 t と各初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で $\mathcal{B}_t(\Omega_0) / \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 可測であり，(ii) 各初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ とブラウン運動 $B(\cdot)$ について $X^{x_0}(t) := F(x_0, B)(t), t \in \mathbb{R}_+$ が (1) の解であり，(iii) あるブラウン運動に対するどの解 $X^{x_0}(\cdot)$ も恒等式 $X^{x_0}(\cdot) = F(x_0, B)(\cdot)$ を満たす．ここで $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) : \omega(0) = 0 \in \mathbb{R}^n\}$ である．弱い解の一意性は，確率分布の意味での一意性であり，強い解の一意性は，道ごとの一意性である．山田–渡辺の定理 [73] により，弱い解が存在し道ごとに一意であれば，その解は強い解である．以下で単に確率微分方程式の解という場合には弱い解を指す．

係数項の b や σ が滑らかな関数である場合は確率微分方程式 (1) の解の存在と一意性がよく知られている．例えば，伊藤清による確率微分方程式の解として，係数がリプシッツ連続でかつ絶対値をとった時の増加の度合いが線形で抑えられる場合には，強い解が存在して一意である ([44])．最近の結果については [55] を参照のこと．1 次元すなわち $n=1$ 或いは拡散係数項がヘルダー連続である場合についてもよく調べられている．一方，弱い解の存在と一意性は，Stroock–Varadhan [69] の局所マルチンゲール問題の解の存在と一意性として特徴づけられる．そして，生成作用素

$$\mathcal{L}f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{i,k}(x)\sigma_{j,k}(x)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,; \quad f \in C_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \tag{2}$$

に関するコーシー問題の解の存在と密接に関わっている．局所マルチンゲール問題とは，$\omega \in \Omega := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ について

$$M^f(t) := f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \mathcal{L}f(\omega(s))\mathrm{d}s,\, \mathcal{F}_t\,; \quad 0 \le t < \infty \tag{3}$$

が連続な局所マルチンゲールとなるような可測空間 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$ を見つけることである．連続で適合的な局所マルチンゲールはブラウン運動を時間変更させた確率過程として表せるので，伊藤の補題と合わせることで局所マルチンゲール問題の解から，(1) の標準ブラウン運動 B が得られ，弱い解を構成できる．特に係数項 b, σ が有界である時，局所マルチンゲール問題の解から弱い解が構成でき，逆もまた成立する ([44], [47], [69])．次の結果が知られている．

- 係数 b, σ が有界かつ連続である時 (1) の弱い解が存在する．さらにコーシー問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{L}u(t,x)\,; \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \quad u(0,x) = f(x)\,; \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

に解 $u^f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ があり，各 $f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ に対して u^f が領域 $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ で有界である場合，弱い解は一意に定まる．

- 係数 b, σ が有界で可測であり，σ が一様に正定値をとる時 (1) の弱い解が存在する ([47])．この場合，$n = 1, 2$ の時には一意性が保証されている ([69])．$\mathbb{R}^n$ を有限個の多面体に切った時に，係数 σ が各多面体上で定数をとる時，弱い解は一意に定まる ([9])．以下で扱うアトラス模型はこの [9] の特別な場合である．

また，特別な例として [27] では，区分的に連続な係数の場合の弱い解の一意性が議論されている．(4) のコーシー問題が解を持ち，解が上で述べたような有界性を持つための十分条件は，係数が $\mathbb{R}^n$ 上で有界かつヘルダー連続で，$a(\cdot) := \sigma\sigma'(\cdot)$ が一様に正定値に値をとることである．ヘルダー連続性を条件から落とすと，コーシー問題 (4) の古典解が保証されないので，(1) の弱い解の一意性は必ずしも保証されない．実際，[52], [66] では，弱い解が確率分布の意味で一意に定まらない例が報告されている．そこで以下のように問題を提起しよう．

問題 A 係数 σ が正定値条件を満たさない時，すなわち，σ のとる行列が退化している場合，或いは，係数が不連続である場合に，局所マルチンゲール問題は一意に解きうるだろうか．

問題 B $n \ge 2$ で (1) の弱い解は強い解となりうるだろうか．$n = 1$ の時には田中の確率微分方程式 [1]

$$X(t)=\int_0^t \big(\mathbf{1}_{\{X(t)>0\}}-\mathbf{1}_{\{X(t)\le 0\}}\big)\mathrm{d}B(s) \tag{5}$$

が弱い解は持つが強い解を持たない例として知られている．

問題 C　その場合 (1) の解はどのような性質や特徴を持つだろうか．

次節以降，アトラス模型を概説し粒子の衝突について調べることで，ここに挙げた問題 A–C について部分的な解を与える．問題 A に対しては §2.1 で $n=2$ の場合に定理 1 で正定値条件を緩められることを見る．問題 B に関しては，まず $n=2$ で弱い解が強い解になる条件については定理 1 で，強い解にならない条件については定理 2 で見る．可算無限個を含めた $n\ge 3$ の場合について，問題 B–C について §3 で議論する．

2　アトラス模型

Σ_n を $\{1,\dots,n\}$ の対称置換群，すなわち各要素 $\pi:=(\pi(1),\dots,\pi(n))\in\Sigma_n$ が $\{1,\dots,n\}$ の置換からなるとする．各要素 $\pi\in\Sigma_n$ に対して楔形の開集合領域 $\mathcal{R}_\pi:=\{(y_1,\dots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n: y_{\pi(1)}>\cdots>y_{\pi(n)}\}$ を定義して，各 $1\le i,k\le n$ について，$y:=(y_1,\dots,y_n)\in Q_k^{(i)}$ は y_i が $(y_1,\dots,y_n)$ の中で k 番目に大きくなるような点となるように集合 $Q_k^{(i)}$ を定義する．これ以降，順位をつける時に同順位の場合には，より小さい添字を優先することにして，辞書的順位をつけて同順位を解消することにする．例えば，$n=3$ で $y=(y_1,y_2,y_3)=(1,2,2)$ の時には $y_2=y_3>y_1$ であるから y_2 と y_3 が同順位であるが，便宜上，添字 $2,3,1$ の順序をとって，$y\in Q_1^{(2)}$ と表すことにする．ここで各 $1\le i,k\le n$ について $\overline{Q}_k^{(i)}=\bigcup_{\{\pi:\pi(k)=i\}}\overline{\mathcal{R}}_\pi$ となる．

各粒子に順位に基づきドリフトと拡散係数を与えることを考えよう．すなわち, n 個の実数 $g_1,\dots,g_n$ と正の実数 $\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_n$ を固定して，各粒子 i についてその t 時点での位置 $X_i(t)$ の順位が k 番目であれば，ドリフト係数を g_k，拡散係数を $\widetilde{\sigma}_k$ とする．$g_1,\widetilde{\sigma}_1$ はそれぞれ $X_1(t),\dots,X_n(t)$ の中で第一位の粒子に与えられるドリフト係数と拡散係数である．各 $1\le i\le n$ について

$$\mathrm{d}X_i(t)=\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{Q_k^{(i)}}(X(t))\big(g_k\mathrm{d}t+\widetilde{\sigma}_k\mathrm{d}B_k(t)\big);\quad t\ge 0 \tag{6}$$

という確率微分方程式で表せる．ここで $\mathbf{1}_A(x)$ は $x\in A$ の時に 1 をとり，$x\notin A$ の時に 0 をとる関数である．

数理ファイナンスの枠組みで Fernholz [22] の提唱した確率ポートフォリオ理論では，特に $g_1=\cdots=g_{n-1}=-1$, $g_n=n$ の時には，第 n 位 (最下位) の粒子にのみ正のドリフト n が与えられ，その他の粒子には負のドリフト -1 が与えられるので，最下位の粒子が系全体を支えている様子から，地上を支えるギリシャ神話のアトラスに擬えて，アトラス模型 (Atlas model) と呼ばれる ([5])．そこでは，$X_i(t)$ を企業 i の時刻 t における資本とした時に，n 社からなる株式市場全体を見て資本の大小によって企業 $i=1,\dots,n$ を順位づけ $X_{(1)}(t)\ge\cdots\ge X_{(n)}(t)$ と並べ替えて，市場における割合 $\mu_k(t):=X_{(k)}(t)\,/\,(X_1(t)+\cdots+X_n(t))$, $k=1,\dots,n$ を実際のデータから計算して対数-対数プロット $\log k\mapsto\log\mu_k(t)$ で表示すると，変動はあるものの長期にわたって安定したグラフとなることが知られている．アトラス模型はそのような安定したグラフを導く株式市場を表す確率模型として提案された．もう一歩踏み込んで，実数 $\gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_n$ を用いて

$$\mathrm{d}X_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{Q_k^{(i)}}(X(t))\big((\gamma + \gamma_i + g_k)\mathrm{d}t + \widetilde{\sigma}_k \mathrm{d}B_k(t)\big)\,; \quad t \ge 0 \tag{7}$$

とする確率模型も調べられている ([24], [39]). ここで, γ は市場全体の成長率, γ_i は企業 i に固有の成長率, g_k, σ_k は順位が第 k 位の企業に固有の成長率とボラティリティと見做せる.

§1 で述べたように (6) を (1) の形式に書き直すならば, ドリフト $b(\cdot)$ と拡散係数 $\sigma(\cdot)$ は

$$b(x) := \left(\sum_{k=1}^{n} g_k 1_{Q_k^{(1)}}(x), \ldots, \sum_{k=1}^{n} g_k 1_{Q_k^{(n)}}(x) \right), \tag{8}$$

$$\sigma(x) := \mathrm{diag}\ \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{\sigma}_k 1_{Q_k^{(1)}}(x), \ldots, \sum_{k=1}^{n} \tilde{\sigma}_k 1_{Q_k^{(n)}}(x) \right); \quad x \in \boldsymbol{R}^n \tag{9}$$

となるので, 丁度, 各多面体 $\mathcal{R}_\pi$, $\pi \in \Sigma_n$ で定数係数をとる確率微分方程式であり, [9] により弱い解が存在して一意性が保証される.

2.1 2 粒子の場合

まずは $n = 2$ として 2 粒子の場合について考察しよう. 表記を簡略化するために定数を書き換えて, 非負の実数 g, h, u, v で $u^2 + v^2 = 1$ を満たすものをとり $\lambda := g + h$, $\nu := g - h$ と定義する. 各時刻 t において $X_1(t)$ と $X_2(t)$ のうち, 小さい方にドリフト g, 拡散係数 v を与え, 大きい方にドリフト $-h$, 拡散係数 u を与えることにする. 任意の $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$ を初期値とする確率過程 $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ に関する以下の確率微分方程式を考える：$t \ge 0$ で

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_1(t) &= \big(g \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) \le X_2(t)\}} - h \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}}\big)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \big(u \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} + v \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) \le X_2(t)\}}\big)\,\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}X_2(t) &= \big(g \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}} - h \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) \le X_2(t)\}}\big)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \big(u \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) \le X_2(t)\}} + v \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t) > X_2(t)\}}\big)\,\mathrm{d}B_2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

対応する生成作用素は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathbf{1}_{\{x_1 > x_2\}} \cdot & \left(\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - h \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + g \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ & + \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2\}} \cdot \left(\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - h \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + g \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

すなわち, (1) の拡散係数 $\sigma(\cdot)$ は $\{x_1 = x_2\}$ を境界とする二つの領域の間で異なる定数をとって不連続であり, さらに, $(u = 0, v = 1)$ 或いは $(u = 1, v = 0)$ という場合を含む. $\mathcal{A}(\cdot) := \sigma\sigma'(\cdot)$ は対角行列に値をとる関数であり, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ について

$$\mathcal{A}(x) := \sigma\sigma'(x) = \begin{pmatrix} u^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x_1 > x_2\}} + v^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2\}} & 0 \\ 0 & u^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x_1 \le x_2\}} + v^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x_1 > x_2\}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

と書ける. 特に, $(u = 0, v = 1)$ 或いは $(u = 1, v = 0)$ の場合には, 退化行列になる.

定理 1 ([25]) $uv \ge 0$ の時, 確率微分方程式 (10) には弱い解が存在し, 確率分布の意味で一意に定まる. さらに, 解は確率過程の道ごとの一意性を満たし, 強い解である. すなわち, $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ によって生成されたフィルター $\mathcal{F}^{(X_1, X_2)}(\cdot)$ は, 標準ブラウン運動 $(B_1(\cdot), B_2(\cdot))$ によって生成され

たフィルター $\mathcal{F}^{(B_1,B_2)}(\cdot)$ に含まれる：

$$\mathcal{F}^{(X_1,X_2)}(t) \subseteq \mathcal{F}^{(B_1,B_2)}(t)\,; \quad 0 \le t < \infty. \tag{13}$$

より一般的に，任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ で $u^2+v^2=1$ を満たす実数をとり，$\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\delta \in \{-1,1\}$, $0 \le \varphi, \vartheta \le 2\pi$ とした時に，$\mathcal{A}(\cdot) := \sigma\sigma'(\cdot)$ の実の平方根を以下のようにとる：

$$\begin{aligned}\sigma(x_1,x_2) &:= \Sigma_+ \cdot \mathbf{1}_{\{x_1>x_2\}} + \Sigma_- \cdot \mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}} \\ &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}_{\{x_1>x_2\}} \\ &\quad + \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}.\end{aligned} \tag{14}$$

ここで Σ_+ と Σ_- は 2 次の正方行列である．すると，ドリフト項を 0 として確率微分方程式は

$$\mathrm{d}X(t) = \Big(\Sigma_+ \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t)>X_2(t)\}} + \Sigma_- \cdot \mathbf{1}_{\{X_1(t)\le X_2(t)\}}\Big)\,\mathrm{d}B(t) \tag{15}$$

と書ける．

定理 2 ([25]) 単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 := (1,0)'$, $\mathbf{e}_2 := (0,1)'$ とする．(14) の拡散係数 $\sigma(\cdot)$ を持つ確率微分方程式 (15) を考える．確率分布の意味で一意に定まる弱い解が，強い解とならない必要十分条件は

$$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)'\,\Sigma_- = -(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)'\,\Sigma_+ \tag{16}$$

である．

(12) で定義される対角行列値関数 $\mathcal{A}(\cdot)$ の平方根 $\sigma(\cdot)$ のうち，$\Sigma_1\,\mathbf{1}_{\{x_1>x_2\}} + \Sigma_2\,\mathbf{1}_{\{x_1\le x_2\}}$ が

$$\Sigma_1 \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm u & 0 \\ 0 & \pm v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm u \\ \pm v & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \Sigma_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} \pm u & 0 \\ 0 & \pm v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm u \\ \pm v & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

に値をとるものは合計 64 組あり，$u \ne v$ かつ $uv \ne 0$ の時はそのうち 56 組は強い解となる．

定理 1 の証明の概略を述べる．まず，$u = v$ の時には (10) で定まる $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ は標準ブラウン運動に区分的に定数のドリフトを加えた確率過程なので，測度変換によって扱える．そこで以下では $uv \ge 0$ かつ $u \ne v$ の場合について考察する．差分 $Y(\cdot) := X_1(\cdot) - X_2(\cdot)$ は

$$\begin{aligned} Y(t) = y - \lambda \int_0^t \operatorname{sgn}\big(Y(s)\big)\,\mathrm{d}s &+ \int_0^t \Big(u\,\mathbf{1}_{\{Y(s)>0\}} + v\,\mathbf{1}_{\{Y(s)\le 0\}}\Big)\,\mathrm{d}B_1(s) \\ &- \int_0^t \Big(u\,\mathbf{1}_{\{Y(s)\le 0\}} + v\,\mathbf{1}_{\{Y(s)>0\}}\Big)\,\mathrm{d}B_2(s)\,; \qquad 0 \le t < T \end{aligned} \tag{17}$$

を満たす．ここで，$\operatorname{sgn}(\cdot) := \mathbf{1}_{\{x\ge 0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$, $x \in \mathbb{R}$ とする．さらに，$(\boldsymbol{\beta}_1(\cdot), \boldsymbol{\beta}_2(\cdot))$ を

$$B_1(t) = \boldsymbol{\beta}_2(t) + \frac{\lambda t}{u-v}, \qquad B_2(t) = \boldsymbol{\beta}_2(t) + \frac{\lambda t}{u-v}\,; \qquad 0 \le t \le T$$

となるように定義すると，1 次元の確率過程 $Y(\cdot)$ は，田中の確率微分方程式 (5) によく似た方程式を満たす：

$$Y(t) = y + \int_0^t \Big(u\,\mathbf{1}_{\{Y(s)>0\}} + v\,\mathbf{1}_{\{Y(s)\le 0\}} \Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_1(s) \\ - \int_0^t \Big(u\,\mathbf{1}_{\{Y(s)\le 0\}} + v\,\mathbf{1}_{\{Y(s)>0\}} \Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_2(s). \tag{18}$$

さらに，$\boldsymbol{\beta} := (\boldsymbol{\beta}_1(\cdot) + \boldsymbol{\beta}_2(\cdot))/\sqrt{2}$, $\tau(\cdot) := \big(u\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\cdot) + v\,\mathbf{1}_{(-\infty,0]}(\cdot)\big)/\sqrt{2}$ とすると

$$Y(t) = y + \int_0^t \tau\big(Y(s)\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(s) - \big(u+v\big)\boldsymbol{\beta}_2(t) \tag{19}$$

となる．ここで，関数 $\tau(\cdot)$ は $u > v \ge 0$ の時には増加関数で，$v > u \ge 0$ の時には減少関数である．

Cameron–Martin–Maruyama–Girsanov 定理による確率測度の変換によって，新しい確率測度 $\mathbb{Q}$ の下では $(\boldsymbol{\beta}_1(\cdot), \boldsymbol{\beta}_2(\cdot))$ が 2 次元の標準ブラウン運動に従うように $\mathbb{P}$ に絶対連続な $\mathbb{Q}$ をとれる．従って，その和である $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$ も確率測度 $\mathbb{Q}$ の下でブラウン運動に従う．そこで，確率微分方程式 (19) について調べれば良い．$u^2 + v^2 = 1$ の条件を課したので，$\mathbb{Q}$ の下では，$Y(\cdot)$ は，伊藤の確率積分の性質から連続なマルチンゲールであり，その 2 次変分 $\langle Y \rangle(t)$ は $\langle Y \rangle(t) \equiv t$, $t \ge 0$ を満たす．すなわち，$Y(\cdot)$ は $Y(0) = y$ を初期値とするブラウン運動となるから，確率微分方程式 (18) の弱い解は，(従って，確率微分方程式 (19) の弱い解も) 分布の意味で一意である．

山田–渡辺の定理 [73] により，強い解であることを言うためには，分布の意味で一意に定まる解が，道ごとに一意に定まることを言えば良い．$\boldsymbol{\beta}_1(\cdot)$ と $\boldsymbol{\beta}_2(\cdot)$ は独立なので確率微分方程式 (19) の解が道ごとに一意であることは，次の結果の特別な場合である．

定理 3 ([25]) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を二つの増加関数 $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の差 $f = f_+ - f_-$ で表される有限変分の関数とする．あるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ 上で二つの連続な局所マルチンゲール $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ で次の条件を満たすものを考える．初期値は $M(0) = N(0) = 0$ であり，$M(\cdot), N(\cdot)$ の 2 次変分について，閉区間 $[0, c]$ に値を持つ発展的可測な確率過程 $q(\cdot)$ が存在して

$$\langle M, N \rangle(t) = 0, \quad \langle M \rangle(t) = \int_0^t q(s)\,\mathrm{d}\langle N \rangle(s)\,; \quad 0 \le t < \infty \tag{20}$$

と書けるものとする．さらに，$A(\cdot)$ を連続で適合的な確率過程で初期値は $A(0) = 0$ であり，各閉区間 $[0, t]$ 上で有限全変分であるとする．この時，確率微分方程式

$$Y(t) = y + \int_0^t f\big(Y(s)\big)\,\mathrm{d}M(s) + A(t) + N(t)\,; \quad 0 \le t < \infty \tag{21}$$

の解は道ごとに一意に定まる．

この定理 3 の背景にあるのは，楕円型偏微分方程式や確率微分方程式の理論で，一様楕円性条件が満たされない場合，楕円性条件を満たすように方程式を正則化することである．ここでは，田中の確率微分方程式 (5) の解は強い解になり得ないが，ノイズが付け加わることによって確率微分方程式 (19) の解の道ごとの一意性が得られる状況にある．定理 1 の証明は，定理 3 により，差分 $Y(\cdot)$ の道ごとの一意性を確認し，確率測度 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{P}$ へと変換した後，和 $X_1(\cdot) + X_2(\cdot)$ がブラウン運動にドリフト項 νt を加えたものであることに注意して，和と差から $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ が表現されるので，確率微分方程式 (10) は強い解を持つことが示される．

定理 2 について，(16) の条件下では，拡散係数のベクトル方向は $\{x_1 > x_2\}$ の領域では $\mathbf{s}_+ :=$

$(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)'\,\Sigma_+$, $\{x_1\le x_2\}$ の領域では $\mathbf{s}_- := (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)'\,\Sigma_-$ であり，丁度，真逆を向くことになる．結果として，拡散過程 $\mathbf{X}(\cdot)=(X_1(\cdot),X_2(\cdot))$ が境界 $\{x_1=x_2\}$ から境界のどちら側に抜け出すかは，ブラウン運動から生成されるノイズだけからでは決定されないことを示している．実際に，以下のように二つの弱い解を構成できる．

$X(\cdot)=(X_1(\cdot),X_2(\cdot))$ を確率微分方程式 (15) の弱い解の一つとする．[32] の結果により，必要ならば確率空間を拡張することで $\widetilde{Y}(\cdot)$ が

$$\widetilde{Y}(t)=\int_0^t \overline{\mathrm{sgn}}(\widetilde{Y}(s))\mathrm{d}Y(s)=\int_0^t \mathrm{sgn}(\widetilde{Y}(s))\mathrm{d}Y(s) \ \text{かつ}$$
$$Y(t)+\max_{0\le s\le t}\big(-Y(s)\big)^+=|\widetilde{Y}(t)|$$

を満たすようにできる．ここで $\overline{\mathrm{sgn}}(x):=\mathbf{1}_{\{x>0\}}-\mathbf{1}_{\{x<0\}}$ と定義し, 上述のように $Y(\cdot):=X_1(\cdot)-X_2(\cdot)$ である．この $(Y(\cdot),\widetilde{Y}(\cdot))$ と $B(\cdot)$ から以下のように定義すると

$$\widetilde{B}(\cdot):=\int_0^{\cdot}\mathrm{sgn}(Y(t))\mathrm{d}B(t),\quad \widehat{W}(\cdot):=-\widetilde{W}(\cdot),$$
$$\widetilde{V}(\cdot):=\int_0^{\cdot}(1,1)\Big(\Sigma_+\mathbf{1}_{\{\widetilde{Y}(t)>0\}}+\Sigma_-\mathbf{1}_{\{\widetilde{Y}(t)\le 0\}}\Big)\mathrm{d}\widetilde{B}(t),$$
$$\widetilde{W}(\cdot):=\int_0^{\cdot}(1,-1)\Big(\Sigma_+\mathbf{1}_{\{\widetilde{Y}(t)>0\}}+\Sigma_-\mathbf{1}_{\{\widetilde{Y}(t)\le 0\}}\Big)\mathrm{d}\widetilde{B}(t),$$
$$\widehat{V}(\cdot):=\int_0^{\cdot}(1,1)\Big(\Sigma_-\mathbf{1}_{\{-\widetilde{Y}(t)\le 0\}}+\Sigma_+\mathbf{1}_{\{-\widetilde{Y}(t)>0\}}\Big)\mathrm{d}\widetilde{B}(t),$$
$$\widetilde{X}_1(\cdot):=\frac{1}{2}(\widetilde{V}(\cdot)+\widetilde{W}(\cdot)),\quad \widetilde{X}_2(\cdot):=\frac{1}{2}(\widetilde{V}(\cdot)-\widetilde{W}(\cdot)),$$
$$\widehat{X}_1(\cdot):=\frac{1}{2}(\widehat{V}(\cdot)+\widehat{W}(\cdot)),\quad \widehat{X}_2(\cdot):=\frac{1}{2}(\widehat{V}(\cdot)-\widehat{W}(\cdot)).$$

これらはいずれもブラウン運動となっている．(16) の条件 $(1,-1)\,\Sigma_-=-(1,-1)\,\Sigma_+$ の下では

$$\widetilde{X}_1(\cdot)-\widetilde{X}_2(\cdot)=\widetilde{W}(\cdot)=\widetilde{Y}(\cdot),\quad \widehat{X}_1(\cdot)-\widehat{X}_2(\cdot)=\widehat{W}(\cdot)=-\widetilde{Y}(\cdot)$$

であることが確認できる．従って，$\widetilde{X}(\cdot)$ と $\widehat{X}(\cdot)$ は共に

$$\mathrm{d}\widetilde{X}(t)=\Big(\Sigma_+\mathbf{1}_{\{\widetilde{X}_1(t)>\widetilde{X}_2(t)\}}+\Sigma_-\mathbf{1}_{\{\widetilde{X}_1(t)\le\widetilde{X}_2(t)\}}\Big)\mathrm{d}\widetilde{B}(t);\quad 0\le t<\infty,$$
$$\mathrm{d}\widehat{X}(t)=\Big(\Sigma_+\mathbf{1}_{\{\widehat{X}_1(t)>\widehat{X}_2(t)\}}+\Sigma_-\mathbf{1}_{\{\widehat{X}_1(t)\le\widehat{X}_2(t)\}}\Big)\mathrm{d}\widetilde{B}(t);\quad 0\le t<\infty$$

を満たすので，道ごとの一意性が満たされない例となっている．

以上のように，$n=2$ の時，(16) の条件により，確率微分方程式 (15) の解は弱い解であるが強い解でない．しかしながら定理 3 を用いることによって，確率微分方程式にノイズを付け加えることによって，強い解になることが次のように示される．

系 1　定数ベクトル $\boldsymbol{c}:=(c_1,c_2)'\in\{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}:x_1\ne x_2\}$ をとり，$W(\cdot)$ を 1 次元標準ブラウン運動で $B(\cdot)$ と独立であるとする．(16) の条件下で

$$\mathrm{d}X(t)=\Big(\Sigma_+\mathbf{1}_{\{X_1(t)>X_2(t)\}}+\Sigma_-\mathbf{1}_{\{X_1(t)\le X_2(t)\}}\Big)\mathrm{d}B(t)+\boldsymbol{c}W(t)$$

の解は道ごとに一意に定まり強い解である．

定理 1 と定理 2 はリプシッツ連続でない係数を持つ場合にも強い解を持つことを示している．§3 では，隣りあう 3 粒子の衝突を調べることによって $n \geq 3$ の場合へと拡張する．2 粒子 $(n=2)$ の場合には粒子の衝突を具体的に解析できるので，遷移確率関数や不変分布について明示できる．一例として (10) の拡散係数が退化している時，すなわち，$(u,v)=(1,0)$ で，初期値 x_1, x_2 が $x_1 - x_2 \geq 0$ となる時に，$\xi_1 > \xi_2$, $\xi_2 < x_2 + gt$ ならば，

$$\mathbb{P}\big(X_1(t) \in \mathrm{d}\xi_1,\, X_2(t) \in \mathrm{d}\xi_2\big) = 2e^{-2\lambda(\xi_1-\xi_2)} \cdot \frac{\xi_1 - 3\xi_2 + x_1 + x_2 + 2gt}{\sqrt{2\pi t^3}} \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2t}\Big(\xi_1 - 3\xi_2 + x_1 + x_2 + \nu t\Big)^2\right\} \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2.$$

これは，2 粒子の軌跡が交差して，以下 §3 で詳しく述べる局所時間 (Local Time) が正になる場合である．一方，$x_1 > x_2$, $\xi_1 > \xi_2 = x_2 + gt$ の場合には，時間 $[0,t]$ で $X_1(\cdot)$ と $X_2(\cdot)$ が交わらないので，

$$\mathbb{P}\big(X_1(t) \in \mathrm{d}\xi_1,\, X_2(t) = \xi_2\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \left(\exp\left\{-\frac{(\xi_1 - x_1 + ht)^2}{2t}\right\}\right. \\ \left. - e^{-2\lambda(\xi_1-\xi_2)} \cdot \exp\left\{-\frac{(\xi_1 - 2\xi_2 + x_1 - ht)^2}{2t}\right\}\right) \mathrm{d}\xi_1$$

となる．(10) の拡散係数が非退化の場合には，すなわち，$u > 0$, $v > 0$ の場合には，遷移確率関数はより複雑になる．詳細は [25] を参照のこと．(10) に類似して，局所時間を方程式に含む場合については [23], [32], [34], [35] で調べられている．

3 粒子の衝突問題と応用

3.1 3 粒子が衝突しない条件と強い解

$n \geq 3$ として (6) を考えよう．拡散係数の定数 $\{\widetilde{\sigma}_k, 1 \leq k \leq n\}$ が正であると仮定しよう．この時には，(6) の弱い解は，確率分布の意味で一意に定まり，粒子の軌跡が交差しない間は，局所的に定数のドリフト項と正の拡散係数項を持ったブラウン運動に従う．n 個の粒子のうち，2 個の粒子の軌跡が交差することがあっても，§2 で 2 個の粒子の確率微分方程式を解析したのと同様にして，強い解を持つことが示される．n 個の粒子のうち，三つ (以上) の粒子が初めて衝突する (停止) 時刻を

$$\tau^* := \inf\{t : \text{添字 } i < j < k \text{ が存在して } X_i(t) = X_j(t) = X_k(t)\} \tag{22}$$

と定義する．

定理 4 ([31], [36], [62]) 確率微分方程式 (6) の解は，$[0, \tau^*)$ において，道ごとに一意に定まり，強い解である．さらに，拡散係数の定数 $\{\widetilde{\sigma}_k, 1 \leq k \leq n\}$ の 2 乗が凹性を持つ，すなわち，

$$\widetilde{\sigma}_k^2 \geq \frac{1}{2}\big(\widetilde{\sigma}_{k-1}^2 + \widetilde{\sigma}_{k+1}^2\big); \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{23}$$

を満たすならば，三つの粒子が衝突することはなく，$\mathbb{P}(\tau^* < \infty) = 0$ である．従って，確率微分方程式 (6) の解は強い解で一意に定まる．

定理 4 の後半部分の証明は，(6) を満たす $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$, $t \geq 0$ から，順位づけられた確率過

程 $X_{(1)}(t) \geq \cdots \geq X_{(n)}(t)$ を得て，その隣りあう確率過程の差分 $Y_k(t) := X_{(k)}(t) - X_{(k+1)}(t)$ をとると，$(n-1)$ 次元の確率過程 $(Y_1(t), \ldots, Y_{n-1}(t))$, $t \geq 0$ は $\mathbb{R}_+^{n-1} := [0, \infty)^{n-1}$ 上に構成される反射壁のあるブラウン運動 (Reflected Brownian motion) に従うことから，その反射壁のあるブラウン運動が領域 $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n-1} \{y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : y_i = 0 = y_j\}$ に到達する確率を調べることに帰着される．

(6) に限らず，一般に，確率微分方程式 (1) の解が弱い解で確率分布の意味で一意に定まる場合に，(22) のように 3 粒子 i, j, k が衝突する最初の時刻 τ^* の確率分布を求めることは，Meyers と Serrin [51] の外部ディリクレ問題を解くことに帰着される．確率論を応用するならば，それは，確率過程 $X(\cdot)$ と超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j = x_k\}$ の距離が 0 になる最初の時刻を調べることに相当して，その距離が 0 に近いところで，距離を上から或いは下から抑えるようなベッセル過程の次元を調べることになる．詳細については [9] に述べられている例や [11], [31], [26], [57] を参照のこと．ベッセル過程との比較による評価は，[11] や [61] の静電ポテンシャルをドリフト項に持つブラウン運動や [68] で調べられた Dyson 型のブラウン運動に従う粒子の 2 粒子或いは 3 粒子の同時衝突の確率について，[3] や [12] でも用いられている．

3.2 無限粒子系

n 個の $\mathbb{R}$ 上を動く粒子の振る舞いを記述している確率微分方程式 (1) の考察を，可算無限個の粒子の振る舞いを記述する確率微分方程式

$$\mathrm{d}X_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{X_i(t) = X_{[j]}(t)\}} \delta_j \mathrm{d}t + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{X_i(t) = X_{[j]}(t)\}} \widetilde{\sigma}_j \mathrm{d}B_i(t) \tag{24}$$

へと拡張しよう．ここで，$\{B_i(\cdot), i \in \mathbb{N}\}$ は独立な標準ブラウン運動からなる系で，各時刻 t で順位を下からつけて

$$X_{[1]}(t) \leq X_{[2]}(t) \leq X_{[3]}(t) \leq \cdots$$

と表すことにする．表記の簡単のため初期値を $X_1(0) < X_2(0) < X_3(0) < \cdots$ とする．同順位に関しては初期値での順位を優先させて解消することにする．例えば，$X_1(t) = \cdots = X_n(t)$ ならば $X_{[i]}(t) = X_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ とする．ここでは，ドリフトと拡散係数は，ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して，$\delta_M = \delta_{M+1} = \cdots$, $\widetilde{\sigma}_M = \widetilde{\sigma}_{M+1} = \cdots$ と仮定する．さらに初期値に関して，実数 $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$X_i(0) \geq \gamma_1 i + \gamma_2\,; \quad i \in \mathbb{N} \tag{25}$$

となることを仮定する．この条件下で，弱い解の存在と一意性が示される．$n = 2$ での解析を $n \geq 3$ へと適用する際に，3 粒子が衝突する事象

$$\{\text{ある } t \geq 0,\ i < j < k \text{ が存在して } X_i(t) = X_j(t) = X_k(t)\} \tag{26}$$

の確率について調べることが鍵となる．(23) を参照して $\{\widetilde{\sigma}_k, k \in \mathbb{N}\}$ について

$$\widetilde{\sigma}_k^2 \geq \frac{1}{2}(\widetilde{\sigma}_{k-1}^2 + \widetilde{\sigma}_{k+1}^2)\,; \quad k \in \mathbb{N} \tag{27}$$

を仮定する．ここで，$\widetilde{\sigma}_0 := 0$ とする．

定理 5 ([36]) (24) の弱い解について，(27) の条件下で事象 (26) は確率 0 である．逆に，(27) が満たされない時には事象 (26) は正の確率をとる．さらに，(24) は $[0, \tau^*)$ において道ごとに一意である．特に凹性 (27) の下では，(24) の弱い解は強い解である．

定理 5 の証明では, n 次元空間を動く確率過程が低次元の多様体への到達する確率に関する De Blassie [15], [16] による結果を援用する．但し，ここでは，[15], [16] で用いられる対称性を失っているので弱い結果となっている．定理 5 は，3 粒子が衝突した後に強い解が構成できるかどうかについて，未解決問題を残している．$n = 3$ の特別な場合には，弱い解に限られることが示される ([33]) が，より一般の条件では未解決である．田中の確率微分方程式や Walsh のブラウン運動に関連して，弱い解と強い解との差異について確率過程を駆動するノイズの性質がより深く調べられている ([2], [70], [71], [74], [75])．順位に基づく拡散過程の無限粒子系について [13], [18], [19], [46], [53], [63], [65], [67] を参照されたい．

3.3 4 個以上の複数の粒子が衝突しない条件

前節までに 3 個の粒子が衝突しないことから強い解が保全されることを見た．3 個の粒子が衝突することを許して，$k(\geq 4)$ 個の粒子 $i_1, \ldots, i_k$ が衝突して一点に集まる事象の確率

$$\mathbb{P}\left(\exists\, t > 0 :\ X_{i_1}(t) = \cdots = X_{i_k}(t)\right) \tag{28}$$

を見よう．任意の k 個の粒子について，この確率が 0 である時，k 個の粒子の衝突はないと定義する．極端な例としては，$k = n$ とした時で，n 個の全粒子が衝突して一点に集まる事象が決して起こり得ないことである．次の結果から，拡散係数の定数項 $\{\widetilde{\sigma}_i, 1 \leq i \leq n\}$ の最大値と最小値に照らし合わせて，k 個の粒子の衝突がないことを容易に調べられる．

定理 6 ([37]) $k \geq 4$ とする．n 個の粒子系 (6) において $\widetilde{\sigma}_1^2, \ldots, \widetilde{\sigma}_n^2$ が

$$\max_{1 \leq i \leq n} \widetilde{\sigma}_i^2 < \frac{k-1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \widetilde{\sigma}_i^2 \tag{29}$$

を満たすならば，k 個の粒子の衝突はない．

定理 6 の条件 (29) は k 個の粒子の衝突の必要条件ではない．一例として，$n = k = 4$ の時には，$\widetilde{\sigma}_1^2 = 2$, $\widetilde{\sigma}_2^2 = \widetilde{\sigma}_3^2 = \widetilde{\sigma}_4^2 = 1$ の場合，全粒子が衝突しないことが示される ([10]) が，条件 (29) を満たさない．条件 (29) を用いる利点は，条件 (29) が n に依らないことである．実際，無限個の粒子について次のことが示される．

定理 7 ([37]) $k \geq 4$ とする．無限個の粒子系 (24) について，$\{\widetilde{\sigma}_i, i \in \mathbb{N}\}$ に関する (29) の条件，すなわち，$\sup_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{\sigma}_i^2 < (k-1) \inf_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{\sigma}_i^2 / 2$ と初期条件 $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ について

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-a x_i^2} < \infty; \quad a > 0 \tag{30}$$

が満たされる時，k 個の粒子の衝突はない．

より複雑な衝突の状況を考えることもできる．例えば，$n = 4$ で，ある時刻 t で

$$X_1(t) = X_2(t) = X_3(t) = X_4(t) \quad \text{(全粒子の衝突)}, \tag{31}$$

$$X_{(1)}(t) = X_{(2)}(t) = X_{(3)}(t) \quad (3\text{ 粒子の衝突}), \tag{32}$$

$$X_{(2)}(t) = X_{(3)}(t) = X_{(4)}(t) \quad (3\text{ 粒子の衝突}), \tag{33}$$

$$X_{(1)}(t) = X_{(2)}(t) \quad \text{かつ} \quad X_{(3)}(t) = X_{(4)}(t) \quad (2\text{ 粒子の同時衝突}) \tag{34}$$

という事象を考えると，拡散係数の定数項 $\widetilde{\sigma}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ が

$$\max(\widetilde{\sigma}_1^2, \widetilde{\sigma}_2^2, \widetilde{\sigma}_3^2, \widetilde{\sigma}_4^2) < \frac{3}{8}(\widetilde{\sigma}_1^2 + \widetilde{\sigma}_2^2 + \widetilde{\sigma}_3^2 + \widetilde{\sigma}_4^2) \tag{35}$$

を満たすならば事象 (31) と (34) の確率は 0 となる．(35) に加えてさらに $\widetilde{\sigma}_2^2 \ge (\widetilde{\sigma}_1^2 + \widetilde{\sigma}_3^2)/2$ ならば，事象 (32) の確率は 0 となる．(35) に加えてさらに $\widetilde{\sigma}_3^2 \ge (\widetilde{\sigma}_2^2 + \widetilde{\sigma}_4^2)/2$ ならば，事象 (33) の確率は 0 となる．より最近の結果については [17] が詳しい．

3.4 衝突の局所時間 (Local Time)

以上のように粒子が衝突する，或いは衝突しない条件を見てきた．ここでは二つ以上の粒子が衝突する時にどのように衝突するのか，半マルチンゲールの原点における局所時間の観点から分析しよう．田中の公式により実数値の半マルチンゲール $\{\xi(t), t \ge 0\}$ に対して，$\xi(\cdot)$ の原点における局所時間を

$$\Lambda^{\xi}(\cdot) := \frac{1}{2}\left(|\xi(\cdot)| - |\xi(0)| - \int_0^{\cdot} \mathrm{sgn}(\xi(s))\mathrm{d}\xi(s)\right) \tag{36}$$

と定義する．(6) をやや拡張して

$$\mathrm{d}X(t) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\pi}(X(t))\big(\boldsymbol{b}_\pi\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{s}_\pi\,\mathrm{d}B(t)\big); \quad 0 \le t < \infty \tag{37}$$

となる確率微分方程式を考えることにする．ここで，各 $\pi \in \Sigma_n$ について $\boldsymbol{b}_\pi := (b_{\pi,1}, \ldots, b_{\pi,n})'$ と $\boldsymbol{s}_\pi := (\boldsymbol{s}_{\pi,i,j})_{1 \le i,j \le n}$ はそれぞれ領域 $\mathcal{R}_\pi$ での n 個の粒子のドリフトベクトルと拡散係数行列を表す．$B(\cdot)$ は n 次元の標準ブラウン運動であり，$\mathcal{R}_\pi$ と Σ_n は §2 の初めに定義した通りである．拡散係数のとる値は必ずしも対角行列に限らない．[5], [38], [39] で扱われた模型は (37) の特別な場合である．

各 $\pi \in \Sigma_n$ について $\overline{\boldsymbol{b}}_\pi := \mathbf{1}'\boldsymbol{b}_\pi / n$, $\overline{\boldsymbol{s}}_\pi := \mathbf{1}'\boldsymbol{s}_\pi / n$, $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)'$ と定義すると n 個の粒子の平均位置 $\overline{X}(\cdot) := (X_1(\cdot) + \cdots + X_n(\cdot)) / n$ は

$$\mathrm{d}\overline{X}(t) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\pi}(X(t))\big(\overline{\boldsymbol{b}}_\pi\,\mathrm{d}t + \overline{\boldsymbol{s}}_\pi\,\mathrm{d}B(t)\big); \quad 0 \le t < \infty$$

と書けるので，$\widehat{\boldsymbol{b}}_\pi := \boldsymbol{b}_\pi - \mathbf{1}\overline{\boldsymbol{b}}_\pi$, $\widehat{\boldsymbol{s}}_\pi := \boldsymbol{s}_\pi - \mathbf{1}\overline{\boldsymbol{s}}_\pi$ を用いて，平均からの乖離 $\widetilde{X}(\cdot) := X(\cdot) - \mathbf{1}\overline{X}(\cdot)$ については

$$\mathrm{d}\widetilde{X}(t) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\pi}(\widetilde{X}(t))\big(\widehat{\boldsymbol{b}}_\pi\,\mathrm{d}t + \widehat{\boldsymbol{s}}_\pi\,\mathrm{d}B(t)\big) \tag{38}$$

と表される．$k = 1, \ldots, n$ について各時刻 t において (6) の解 $X(\cdot)$ を並べ替えて k 番目の順位となるものを $R_k(\cdot)$ と定義しよう：

$$R_k(\cdot) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{Q_k^{(i)}}(X(\cdot))X_i(\cdot) = X_{\mathfrak{P}_{\cdot}(k)}(\cdot); \quad k = 1, \ldots, n. \tag{39}$$

これらを $k=1,\ldots,n$ について並べて順位過程 $R(\cdot):=(R_1(\cdot),\ldots,R_n(\cdot))'$ とする．§2 の最初に定義したように，集合 $Q_k^{(i)}$ は y_i が $(y_1,\ldots,y_n)$ の中で k 番目に大きくなるように定めた集合であり，Σ_n に値をとる確率過程 $\mathfrak{P}(t):=(\mathfrak{P}_t(1),\ldots,\mathfrak{P}_t(n))$ は粒子の順位から粒子の名前への置換を表している．Banner と Ghomrasni の結果 [6] により $(R_1(\cdot),\ldots,R_n(\cdot))$ は半セミマルチンゲールになることが示される．さらに，(36) で定義される局所時間について，順位 k と順位 ℓ の粒子の距離 $R_k(\cdot)-R_\ell(\cdot)$ の 0 における局所時間 $L^{k,\ell}(\cdot):=\Lambda^{R_k-R_\ell}(\cdot)$ を並べて $L(\cdot):=(L^{1,2}(\cdot),\ldots,L^{n-1,n}(\cdot))'$ と定義する．

定理 8 ([39])　各 $\pi\in\Sigma_n$ において行列 $\boldsymbol{s}_\pi$ が正則であるとする．(37) で表される $X(\cdot)$ について粒子間の距離 $R_k-R_\ell(\cdot)$ の原点における局所時間 $L^{k,\ell}(\cdot)$ は

$$L^{k,\ell}(\cdot)\equiv 0;\quad k-\ell\geq 2 \tag{40}$$

である．すなわち，3 個以上の粒子が衝突しても局所時間は 0 である．

定理 8 の証明は $R_k-R_\ell(\cdot)$ を下から評価するベッセル過程と比較することで得られる．

3.5　弱い解だが強い解でない場合

確率微分方程式 (37) の拡散係数項の定数行列 $\boldsymbol{s}_\pi$, $\pi\in\Sigma_n$ は必ずしも対角行列ではない．ここではそのような場合に，§2 の結果を発展させて (37) の解が強い解ではないことを示そう．各 $\pi\in\Sigma_n$, $1\leq i,j\leq n$ について $\boldsymbol{s}_\pi$ の (i,i), (i,j), (j,i), (j,j) 成分を用いて (2×2) の部分行列 $(\boldsymbol{s}_\pi)_{[i,j]}$ を定義する．$\boldsymbol{e}_i$ を n 次元単位ベクトルで i 番目の成分が 1 であるものとする．さらに，π の i 番目と j 番目を入れ替えた置換 $\widetilde{\pi}[\pi,i,j]:\Sigma_n\times\{1,\ldots,n\}^2\to\Sigma_n$

$$\widetilde{\pi}[\pi,i,j](\ell):=\begin{cases}\pi(\ell) & \text{if } \ell\neq i,j,\\ \pi(j) & \text{if } \ell=i,\\ \pi(i) & \text{if } \ell=j\end{cases}$$

と表すことにする．§2 の結果と半マルチンゲールの折り込み [32], [35] の議論から次の結果が得られる．

定理 9　ある π, i,j が存在して

$$(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)'(\boldsymbol{s}_\pi)_{[i,j]}=-(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)'(\boldsymbol{s}_{\widetilde{\pi}[\pi,i,j]})_{[i,j]}$$

となるならば，(37) の弱い解は強い解にはなり得ない．

3.6　反射ブラウン運動との関係

定理 8 と [6] の結果から (39) で定義された順位過程について，半マルチンゲール分解

$$\mathrm{d}R(t)=\big(\pi^{-1}\circ\boldsymbol{b}_\pi\mathrm{d}t+\pi^{-1}\circ\boldsymbol{s}_\pi\mathrm{d}B(t)\big)|_{\pi=\mathfrak{P}_\cdot}+C^\circ\mathrm{d}L(t)$$

が得られる．ここで C° は $(n\times(n-1))$ 行列で

$$C^{\circ} := \begin{pmatrix} 1/2 & & & & \\ -1/2 & 1/2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1/2 & 1/2 & \\ & & & -1/2 & \end{pmatrix}$$

と表される．さらにその差分過程 $Y(\cdot) := (Y_1(\cdot), \ldots, Y_{n-1}(\cdot))'$ を $Z_k(\cdot) := R_k(\cdot) - R_{k+1}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n-1$ と定義すると，各 $Y_k(\cdot)$ は非負の半マルチンゲールで

$$\mathrm{d}Y_k(t) = \left((\boldsymbol{b}_{\pi,\pi(k)} - \boldsymbol{b}_{\pi,\pi(k+1)})\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{s}_{\pi,\pi(k),j}\mathrm{d}B_j(t) - \sum_{\ell=1}^{n} \boldsymbol{s}_{\pi,\pi(k+1),\ell}\mathrm{d}B_\ell(t)\right)\bigg|_{\pi=\mathfrak{P}(t)} + \mathrm{d}L^{k,k+1}(t) - \frac{1}{2}\big(\mathrm{d}L^{k+1,k+2}(t) + \mathrm{d}L^{k-1,k}(t)\big); \quad t \ge 0$$

と表されるので $\{Y(t), t \ge 0\}$ は $\mathbb{R}_+^{n-1}$ に構成された反射壁のあるブラウン運動である．反射ブラウン運動の様々な性質 (到達確率，正の再帰性，時間反転，不変測度，確率流れ，道ごとの微分) はよく調べられている ([7], [8], [14], [28]–[30], [42], [48]–[50], [56], [58], [64], [72], [76])．

3.7 安定性と不変測度

(38) で表される平均からの乖離 $\widetilde{X}(\cdot)$ は，総和が常に 0 になっている．$\widetilde{X}(\cdot)$ の不変測度を見るために，次の安定性条件を仮定しよう：

$$c := -\max_{\pi\in\Sigma_n} \max_{1\le k\le n-1} \sum_{\ell=1}^{k} \big(\boldsymbol{b}_{\pi,\pi(\ell)} - \overline{\boldsymbol{b}}_\pi\big) > 0. \tag{41}$$

安定性条件 (41) の下では，各粒子がブラウン運動で互いに離れていくと，離れていったそれらの粒子をドリフト項によって引き戻して離れすぎないような状況になっている．$\Pi := \{y \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}'y = 0\}$ と定義すると，この条件の下で，$y\sum_{\pi\in\Sigma_n} \mathbf{1}_{\mathrm{R}_\pi}(y)\widehat{\boldsymbol{b}}_\pi \le -c\|y\|^2$; $y \in \Pi$ が成立する．Hasminskii [45] の理論により $\widetilde{X}(\cdot)$ に関する大数の強法則が成立する．すなわち，Π 上の確率測度 $\boldsymbol{\mu}$ が存在して，任意の有界な可測関数 $f : \Pi \to \mathbb{R}$ について確率 1 で

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\widetilde{X}(t))\mathrm{d}t = \int_\Pi f(u)\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}u), \quad \text{a.s.} \tag{42}$$

となる．このことから，$X(\cdot)$ が平均の周りで安定的であると言える．各 $\pi \in \Sigma_n$ について $f(\cdot) = \mathbf{1}_{\mathrm{R}_\pi}(\cdot)$ とおく，或いは，各 $1 \le i, k \le n$ について $\mathbf{1}_{Q_k^{(i)}}(\cdot)$ とおくことで，$X(\cdot)$ の $\mathcal{R}_\pi$ や $Q_k^{(i)}$ における平均滞在時間は

$$\begin{aligned} \theta_\pi &:= \boldsymbol{\mu}(\mathcal{R}_\pi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\pi}(X(t))\,dt; \quad \pi \in \Sigma_n, \\ \theta_{k,i} &:= \boldsymbol{\mu}(Q_k^{(i)}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{1}_{Q_k^{(i)}}(X(t))\,dt; \quad 1 \le k,\, i \le n \end{aligned} \tag{43}$$

と表せる．(37) のような一般の場合には不変測度 $\boldsymbol{\mu}$ を明示的に表せないが，特別な場合には具体的に計算できる．隣りあう粒子間の距離の不変分布が指数分布の積の混合分布の形で表される場合である．

定理 10 ([39]) アトラス模型 (7) について，各 $\pi \in \Sigma_n$, $k = 1, \ldots, n-1$ について

$$\sum_{\ell=1}^{k}(g_\ell+\gamma_{\pi(\ell)})<0 \tag{44}$$

が満たされる時，$X(\cdot)$ は平均の周りで安定的である．拡散係数項の定数 $\{\widetilde{\sigma}_k^2, k=1,\ldots,n\}$ が線形関係にある時，すなわち，

$$\widetilde{\sigma}_1^2-\widetilde{\sigma}_2^2=\cdots=\widetilde{\sigma}_{n-1}^2-\widetilde{\sigma}_n^2 \tag{45}$$

となる時，非負の値をとる隣りあう粒子間の距離 $Y_k(\cdot)=R_k(\cdot)-R_{k+1}(\cdot)$, $k=1,\ldots,n-1$ と Σ_n に値をとる置換 $\mathfrak{P}(\cdot)$ の不変分布は $\mathbb{R}_+^{n-1}\times\Sigma_n$ 上の確率測度 $\boldsymbol{\nu}$ で，可測集合 $A\subset\mathbb{R}_+^{n-1}$, $B\subset\Sigma_n$ について

$$\boldsymbol{\nu}(A\times B)=\left(\sum_{\boldsymbol{q}\in\Sigma_n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_{\boldsymbol{q},k}^{-1}\right)^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}\in B}\int_A\exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{\boldsymbol{p},k}y_k\right)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{n-1}. \tag{46}$$

ここで $\lambda_{\boldsymbol{p},k}:=-4\sum_{\ell=1}^{k}(g_\ell+\gamma_{\pi(\ell)})\,/\,\left(\widetilde{\sigma}_k^2+\widetilde{\sigma}_{k+1}^2\right)$, $\boldsymbol{p}\in\Sigma_n$ である．特に，$(Y_1(\cdot),\ldots,Y_{n-1}(\cdot))$ の不変分布には密度関数 $\mathfrak{p}(\cdot)$ が存在して，$y_1>0,\ldots,y_{n-1}>0$ について

$$\mathfrak{p}(y_1,\ldots,y_{n-1}):=\left(\sum_{\boldsymbol{q}\in\Sigma_n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_{\boldsymbol{q},k}^{-1}\right)^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}\in\Sigma_n}\exp\left(-\sum_{\ell=1}^{n-1}\lambda_{\boldsymbol{p},\ell}\,y_\ell\right). \tag{47}$$

系 2　条件 (44)–(45) を仮定する．アトラス模型 (7) において，(43) で定義される平均滞在時間 θ_p, $\theta_{k,i}$ は，$p\in\Sigma_n$, $1\le k,i\le n$ について

$$\theta_p=\left(\sum_{\boldsymbol{q}\in\Sigma_n}\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_{\boldsymbol{q},k}^{-1}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{p,j}^{-1},\quad \theta_{k,i}=\sum_{p:\,p(k)=i}\theta_p. \tag{48}$$

アトラス模型 (6) のように定数 γ_i が全て 0 の時には，(46) に現れる $\lambda_{p,k}$ は p に依存しない定数となり，$(Y_1(\cdot),\ldots,Y_n(\cdot))$ の不変分布は，指数分布の積で表される．§2 で述べたようにアトラス模型を数理ファイナンスの枠組みで考えると，長い年月を通じて企業の順位に応じて市場に占める割合が安定的に定まる様子を描写するのに，定常分布を明示的に書き下せるのは都合が良い．アトラス模型の株式投資のポートフォリオへの応用については [4], [22], [24], [39], [41]，定常分布への収束の速さについては [38], [54] を参照されたい．

3.8　多孔質媒質 (Porous Medium) 方程式

単位閉区間 $[0,1]$ 上の関数 $\mathfrak{g}:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\mathfrak{s}:[0,1]\to(0,\infty)$ で $\mathfrak{g}(k/n)=g_k$, $\mathfrak{s}(k/n)=\widetilde{\sigma}_k$, $k=1,\ldots,n$ となるものをとる．確率微分方程式 (6) の解 $(X_1(\cdot),\ldots,X_n(\cdot))$ の経験分布関数をディラック測度 $\boldsymbol{\delta}$ を用いて，

$$\rho(t):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\delta}_{X_i(t)}\,;\quad t\ge 0 \tag{49}$$

で定義し，$F(x;\xi)$, $x\in\mathbb{R}$ を確率変数 ξ の確率分布関数とする．定義により，各 i について確率微分方程式 (6) は

$$\mathrm{d}X_i(t)=\mathfrak{g}(F(X_i(t);\rho(t)))\mathrm{d}t+\mathfrak{s}(F(X_i(t);\rho(t)))\mathrm{d}B_i(t)\,;\quad t\ge 0 \tag{50}$$

と書ける．前節 §3.7 では平均からの乖離を分析したが，ここでは，中央値 $\mathrm{med}(X(t))$ からの乖離

$$\widehat{Y}^{(n)}(t) := (\widehat{Y}_1(t), \ldots, \widehat{Y}_n(t)),$$
$$\widehat{Y}_i(t) := X_i(t) - \mathrm{med}(X(t))\,; \quad t \ge 0,\, i = 1, \ldots, n \tag{51}$$

を分析する．ここで，中央値 $\mathrm{med}(X(t))$ は，n が奇数の時には，下から数えて $(n+1)/2$ 番目の値 $X_{[(n+1)/2]}$ をとり，n が偶数の時には，下から数えて $n/2-1$ 番目の値 $X_{[(n/2)-1]}(t)$ をとると定義する．

以下では，関数 $\mathfrak{g}$ が連続微分可能で，微分係数 $\mathfrak{g}'$ については，ある定数 $c_0 > 0$ が存在して，$\mathfrak{g}'(x) \le -c_0 < 0$, $0 \le x \le 1$ であると仮定する．さらに，関数 $\mathfrak{s}$ は線形であると仮定する．初期値分布を前節 §3.7 で得られた不変分布，すなわち，指数分布の積に従うものとして，$n \to \infty$ の極限を考えよう．ここで，Lip をリプシッツ連続な関数の集合，$\mathrm{Lip}(f)$ をリプシッツ連続な関数 f のリプシッツ定数として，可分距離空間 S に対して $M_1(S)$ を S 上の確率測度の集合で，任意の $x_1, x_2 \in M_1(S)$ に対して距離

$$\mathrm{dist}(x_1, x_2) := \sup_{f \in \mathrm{Lip}} \left\{ \int_S f(y) \mathrm{x}_1(y) - \int_S f(y) \mathrm{x}_2(y) \,:\, \sup_y |f(y)| + \mathrm{Lip}(f) \le 1 \right\} \tag{52}$$

を導入する．$(\widehat{Y}_1(t), \ldots, \widehat{Y}_n(t))$ の経験分布関数

$$\widehat{\rho}^{(n)}(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\delta}_{\widehat{Y}_i(t)}\,; \quad 0 \le t \le T \tag{53}$$

は，確率測度の集合 $M_1(C([0,T], M_1(\mathbb{R})))$ の要素の一つと見做せる．

定理 11 ([67]) $\{\widehat{\rho}^{(n)}(\cdot), n \in \mathbb{N}\}$ は $M_1(C([0,T], M_1(\mathbb{R})))$ 上の弱収束の位相に関して相対コンパクトである．その任意の集積点 $\widehat{\rho}^{(\infty)}$ と，$\widehat{\rho}^{(\infty)}$ に従うランダム要素 η_t, $0 \le t \le T$ について，任意の $f \in C_c^3(\mathbb{R})$, $t \ge 0$ で

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\eta_t - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\eta_0 = \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}} \left(\mathfrak{g}(F_{\eta_s}) f' + \frac{1}{2} \mathfrak{s}(F_{\eta_s}) f'' \right) \mathrm{d}\eta_s \tag{54}$$

という発展方程式が成り立つ．さらに，$\mathfrak{R}(t,x) := F_{\eta_t}(x)$ を η_t の分布関数とすると，次の対流のある多孔質媒質 (Porous Medium) の方程式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\mathfrak{R}} \mathfrak{s}^2(u) \mathrm{d}u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\mathfrak{R}} \mathfrak{g}(u) \mathrm{d}u \right). \tag{55}$$

定理 11 は大数の法則に相当している．[21], [40], [46], [59], [60] では，$n \to \infty$ の時の，中心極限定理，大偏差原理やカオス伝播についても調べられている．

謝辞 本論説の改訂にあたり, 細部にわたり有益なご指摘, 参考文献に関するご助言をくださった査読者の方々に厚く御礼申し上げます．本論説の結果の一部は National Science Foundation からの研究助成 NSF Grant DMS-1313373, DMS-1615229, DMS-2008427 を受けて行った研究からの結果です．

文　献

[1] 田中洋・長谷川実，確率微分方程式，Seminar on Probability, **19** (1964), 1–88; https://www.mathsoc.jp/assets/pdf/activity/others/SoP/19.pdf.

[2] J. Akahori, M. Izumi and S. Watanabe, Noises,

stochastic flows and E_0-semigroups, In: Selected Papers on Probability and Statistics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **227**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 1–23.

[3] R. Allez and A. Guionnet, A diffusive matrix model for invariant β-ensembles, Electron. J. Probab., **18** (2013), no. 62.

[4] S. A. Almada Monter, M. Shkolnikov and J. Zhang, Dynamics of observables in rank-based models and performance of functionally generated portfolios, Ann. Appl. Probab., **29** (2019), 2849–2883.

[5] A. D. Banner, R. Fernholz and I. Karatzas, Atlas models of equity markets, Ann. Appl. Probab., **15** (2005), 2296–2330.

[6] A. D. Banner and R. Ghomrasni, Local times of ranked continuous semimartingales, Stochastic Process. Appl., **118** (2008), 1244–1253.

[7] R. F. Bass, K. Burdzy and Z.-Q. Chen, Uniqueness for reflecting Brownian motion in lip domains, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **41** (2005), 197–235.

[8] R. F. Bass and P. Hsu, Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains, Ann. Probab., **19** (1991), 486–508.

[9] R. F. Bass and É. Pardoux, Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients, Probab. Theory Related Fields, **76** (1987), 557–572.

[10] C. Bruggeman and A. Sarantsev, Multiple collisions in systems of competing Brownian particles, Bernoulli, **24** (2018), 156–201.

[11] E. Cépa and D. Lépingle, Diffusing particles with electrostatic repulsion, Probab. Theory Related Fields, **107** (1997), 429–449.

[12] E. Cépa and D. Lépingle, No multiple collisions for mutually repelling Brownian particles, In: Séminaire de Probabilités XL, (eds. C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault and C. Stricker), Lecture Notes in Math., **1899**, Springer, 2007, pp. 241–246.

[13] M. Cabezas, A. Dembo, A. Sarantsev and V. Sidoravicius, Brownian particles with rank-dependent drifts: out-of-equilibrium behavior, Comm. Pure Appl. Math., **72** (2019), 1424–1458.

[14] J. G. Dai and R. J. Williams, Existence and uniqueness of semimartingale reflecting Brownian motions in convex polyhedra, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **40** (1995), 3–53.

[15] R. D. De Blassie, On hitting single points by a multidimensional diffusion, Stochastics Stochastics Rep., **65** (1998), 1–11.

[16] R. D. De Blassie, Scale-invariant diffusions: transience and non-polar points, Bernoulli, **5** (1999), 589–614.

[17] C. Bruggeman and A. Sarantsev, Multiple collisions in systems of competing Brownian particles, Bernoulli, **24** (2018), 156–201.

[18] S. Chatterjee and S. Pal, A phase transition behavior for Brownian motions interacting through their ranks, Probab. Theory Related Fields, **147** (2010), 123–159.

[19] A. Dembo and L.-C. Tsai, Equilibrium fluctuation of the Atlas model, Ann. Probab., **45** (2017), 4529–4560.

[20] A. Dembo, M. Jara and S. Olla, The infinite Atlas process: convergence to equilibrium, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **55** (2019), 607–619.

[21] A. Dembo, M. Shkolnikov, S. R. S. Varadhan and O. Zeitouni, Large deviations for diffusions interacting through their ranks, Comm. Pure Appl. Math., **69** (2016), 1259–1313.

[22] E. R. Fernholz, Stochastic Portfolio Theory, Appl. Math. (N.Y.), **48**, Stochastic Modeling and Applied Probability, Springer, 2002.

[23] E. R. Fernholz, T. Ichiba and I. Karatzas, Two Brownian particles with rank-based characteristics and skew-elastic collisions, Stochastic Process. Appl., **123** (2013), 2999–3026.

[24] R. Fernholz, T. Ichiba and I. Karatzas, A second-order stock market model, Ann. Finance, **9** (2013), 439–454.

[25] E. R. Fernholz, T. Ichiba, I. Karatzas and V. Prokaj, Planar diffusions with rank-based characteristics and perturbed Tanaka equations, Probab. Theory Related Fields, **156** (2013), 343–374.

[26] A. Friedman, Nonattainability of a set by a diffusion process, Trans. Amer. Math. Soc., **197** (1974), 245–271.

[27] P. Gao, The martingale problem for a differential operator with piecewise continuous coefficients, In: Seminar on Stochastic Processes, 1992, Seattle, WA, 1992, (eds. E. Çinlar, K. L. Chung and M. J. Sharpe), Progr. Probab., **33**, Birkhäuser, Boston, MA, 1993, pp. 135–141.

[28] J. M. Harrison and M. I. Reiman, Reflected Brownian motion on an orthant, Ann. Probab., **9** (1981), 302–308.

[29] J. M. Harrison and R. J. Williams, Brownian models of open queueing networks with homogeneous customer populations, Stochastics, **22** (1987), 77–115.

[30] J. M. Harrison and R. J. Williams, Multidimensional reflected Brownian motions having exponential stationary distributions, Ann. Probab., **15** (1987), 115–137.

[31] T. Ichiba and I. Karatzas, On collisions of Brownian particles, Ann. Appl. Probab., **20** (2010), 951–977.

[32] T. Ichiba and I. Karatzas, Skew-unfolding the Skorokhod reflection of a continuous semimartin-

gale, In: Stochastic Analysis and Applications 2014: In Honor of Terry Lyons, Oxford, 2013, (eds. D. Crisan, B. Hambly and T. Zariphopoulou), Springer Proc. Math. Stat., **100**, Springer, 2014, pp. 349–376.

[33] T. Ichiba and I. Karatzas, Degenerate competing three-particle systems, Bernoulli, **28** (2022), 2067–2094.

[34] T. Ichiba, I. Karatzas and V. Prokaj, Diffusions with rank-based characteristics and values in the nonnegative quadrant, Bernoulli, **19** (2013), 2455–2493.

[35] T. Ichiba, I. Karatzas, V. Prokaj and M. Yan, Stochastic integral equations for Walsh semimartingales, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **54** (2018), 726–756.

[36] T. Ichiba, I. Karatzas and M. Shkolnikov, Strong solutions of stochastic equations with rank-based coefficients, Probab. Theory Related Fields, **156** (2013), 229–248.

[37] T. Ichiba and A. Sarantsev, Yet another condition for absence of collisions for competing Brownian particles, Electron. Commun. Probab., **22** (2017), Paper No. 8.

[38] T. Ichiba, S. Pal and M. Shkolnikov, Convergence rates for rank-based models with applications to portfolio theory, Probab. Theory Related Fields, **156** (2013), 415–448.

[39] T. Ichiba, V. Papathanakos, A. Banner, I. Karatzas and R. Fernholz, Hybrid Atlas models, Ann. Appl. Probab., **21** (2011), 609–644.

[40] B. Jourdain and J. Reygner, Propogation of chaos for rank-based interacting diffusions and long time behaviour of a scalar quasilinear parabolic equation, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput., **1** (2013), 455–506.

[41] B. Jourdain and J. Reygner, Capital distribution and portfolio performance in the mean-field Atlas model, Ann. Finance, **11** (2015), 151–198.

[42] W. Kang and R. J. Williams, An invariance principle for semimartingale reflecting Brownian motions in domains with piecewise smooth boundaries, Ann. Appl. Probab., **17** (2007), 741–779.

[43] W. Kang and K. Ramanan, A Dirichlet process characterization of a class of reflected diffusions, Ann. Probab., **38** (2010), 1062–1105.

[44] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed., Grad. Texts in Math., **113**, Springer, 1991.

[45] R. Z. Hasminskii, Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[46] P. Kolli and M. Shkolnikov, SPDE limit of the global fluctuations in rank-based models, Ann. Probab., **46** (2018), 1042–1069.

[47] N. V. Krylov, Controlled Diffusion Processes, Appl. Math., **14**, Springer, 1980.

[48] H. Kunita, Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge Stud. Adv. Math., **24**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[49] D. Lipshutz and K. Ramanan, On directional derivatives of Skorokhod maps in convex polyhedral domains, Ann. Appl. Probab., **28** (2018), 688–750.

[50] D. Lipshutz and K. Ramanan, Pathwise differentiability of reflected diffusions in convex polyhedral domains, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **55** (2019), 1439–1476.

[51] N. Meyers and J. Serrin, The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations, J. Math. Mech., **9** (1960), 513–538.

[52] N. Nadirashvili, Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **24** (1997), 537–549.

[53] S. Pal and J. Pitman, One-dimensional Brownian particle systems with rank-dependent drifts, Ann. Appl. Probab., **18** (2008), 2179–2207.

[54] S. Pal and M. Shkolnikov, Concentration of measure for Brownian particle systems interacting through their ranks, Ann. Appl. Probab., **24** (2014), 1482–1508.

[55] E. Pardoux and A. Răşcanu, Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations, Stoch. Model. Appl. Probab., **69**, Springer, 2014.

[56] K. Ramanan, Reflected diffusions defined via the extended Skorokhod map, Electron. J. Probab., **11** (2006), 934–992.

[57] S. Ramasubramanian, Hitting of submanifolds by diffusions, Probab. Theory Related Fields, **78** (1988), 149–163.

[58] M. I. Reiman and R. J. Williams, A boundary property of semimartingale reflecting Brownian motions, Probab. Theory Related Fields, **77** (1988), 87–97.

[59] J. Reygner, Chaoticity of the stationary distribution of rank-based interacting diffusions, Electron. Commun. Probab., **20** (2015), no. 60.

[60] J. Reygner, Equilibrium large deviations for mean-field systems with translation invariance, Ann. Appl. Probab., **28** (2018), 2922–2965.

[61] L. C. G. Rogers and Z. Shi, Interacting Brownian particles and the Wigner Law, Probab. Theory Related Fields, **95** (1993), 555–570.

[62] A. Sarantsev, Triple and Simultaneous Collisions of Competing Brownian Particles, Electron. J. Probab., **20** (2015), no. 29.

[63] A. Sarantsev, Infinite systems of competing Brownian particles, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **53** (2017), 2279–2315.

[64] A. Sarantsev, Reflected Brownian motion in a convex polyhedral cone: tail estimates for the stationary distribution, J. Theoret. Probab., **30**

(2017), 1200–1223.

[65] A. Sarantsev and L.-C. Tsai, Stationary gap distributions for infinite systems of competing Brownian particles, Electron. J. Probab., **22** (2017), Paper No. 56.

[66] M. V. Safonov, Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients, SIAM J. Math. Anal., **30** (1999), 879–895.

[67] M. Shkolnikov, Large systems of diffusions interacting through their ranks, Stochastic Process. Appl., **122** (2012), 1730–1747.

[68] H. Spohn, Dyson's model of interacting Brownian motions at arbitrary coupling strength, In: I Brazilian School in Probability, Rio de Janeiro, 1997, (eds. M. E. Vares and M. Menshikov), Markov Process. Related Fields, **4** Polymat, Moscow, 1998, pp. 649–661.

[69] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes. Reprint of the 1997 edition, Classics Math., Springer, 2006.

[70] B. Tsirelson, Triple points: From non-Brownian filtrations to harmonic measures, Geom. Funct. Anal., **7** (1997), 1096–1142.

[71] B. Tsirelson, Nonclassical stochastic flows and continuous products, Probab. Surv., **1** (2004), 173–298.

[72] S. R. S. Varadhan and R. J. Williams, Brownian motion in a wedge with oblique reflection, Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 405–443.

[73] T. Yamada and S. Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ., **11** (1971), 155–167.

[74] J. Warren, The noise made by a Poisson snake, Electron. J. Probab., **7** (2002), no. 21.

[75] S. Watanabe, Stochastic flow and noise associated with the Tanaka stochastic differential equation, Ukrainian Math. J., **52** (2000), 1346–1365.

[76] R. J. Williams, Reflected Brownian motion with skew symmetric data in a polyhedral domain, Probab. Theory Related Fields, **75** (1987), 459–485.

(2021 年 4 月 2 日提出)

(いちば ともゆき・カリフォルニア大学サンタバーバラ校)